Prof. Dr. J. Steinebach Sommersemester 2010

1. Übungsblatt zur VL „Wahrscheinlichkeitstheorie “

Abgabe: 19.04.2010, 09.45 - 10.00 Uhr, vor dem Hörsaal des MI

Aufgabe 1 (mündlich) [Limes superior]

Bestimmen Sie eine Folge von Einpunktmengen $A_n = \{k_n\}$ mit $k_n \in \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $\limsup A_n = \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte) [Spur-σ-Algebra]

Sei $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein beliebiges Mengensystem. Für $\emptyset \neq \Omega_0 \in \mathcal{P}(\Omega)$ definieren wir $\Omega_0 \cap \mathcal{E} := \{\Omega_0 \cap E \mid E \in \mathcal{E}\}$. Zeigen Sie, dass $\Omega_0 \cap \mathcal{A}(\mathcal{E})$ die kleinste σ-Algebra in Ω_0 ist, die $\Omega_0 \cap \mathcal{E}$ umfasst, d.h., $\Omega_0 \cap \mathcal{A}(\mathcal{E}) = \mathcal{A}(\Omega_0 \cap \mathcal{E})$.

Hinweis: Betrachten Sie das Mengensystem $\mathcal{S} := \{A \subset \Omega \mid \Omega_0 \cap A \in \mathcal{A}(\Omega_0 \cap \mathcal{E})\}$ und zeigen Sie, dass $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra in Ω ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte) [σ-Algebra]

Sei $T : \Omega \to \Omega'$ eine beliebige Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Ist $\mathcal{A}'$ eine σ-Algebra in Ω', dann ist $T^{-1}(\mathcal{A}') := \left\{T^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\right\}$ eine σ-Algebra in Ω.

(b) Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in Ω, so ist im Allgemeinen $T(\mathcal{A}) := \{T(A) : A \in \mathcal{A}\}$ keine σ-Algebra in Ω'.

Aufgabe 4 (3 Punkte) [Ring, Algebra]

Seien $\Omega \neq \emptyset$, $\mathcal{E}$ ein Ring in Ω und $\mathcal{R}_0 := \mathcal{E} \cup \{E^c : E \in \mathcal{E}\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{R}_0$ die kleinste Algebra in Ω ist, die $\mathcal{E}$ umfasst, d.h., $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_0(\mathcal{E})$.