10. Übungsblatt zur VL „Wahrscheinlichkeitstheorie“

Abgabe: 28.06.2010, 09.45 - 10.00 Uhr, vor dem Hörsaal des MI

Aufgabe 36 (mündlich) [Konvergenz in Verteilung]

Seien zwei Folgen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *stochastisch äquivalent*, d.h., $X_n - Y_n \xrightarrow{P} 0 \quad (n \to \infty)$. Beweisen Sie: $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \quad (n \to \infty)$ gilt genau dann, wenn $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \quad (n \to \infty)$ gilt.

Aufgabe 37 (4 Punkte) [P-stochastische Konvergenz]

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Beweisen Sie: Es gilt $X_n \xrightarrow{P} X \ (n \to \infty)$ für eine Zufallsvariable X genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} \sup_{m>n} P\left(|X_m - X_n| > \varepsilon\right) = 0$ für alle $\varepsilon > 0$ gilt.

Aufgabe 38 (4 Punkte) [P-fast-sichere Konvergenz]

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Beweisen Sie: Es gilt $X_n \xrightarrow{P-f.s.} X$ $(n \to \infty)$ für eine Zufallsvariable X genau dann, wenn $\sup_{m>n} |X_m - X_n| \xrightarrow{P} 0 \quad (n \to \infty)$ gilt.

Aufgabe 39 (4 Punkte) [gleichgradige Integrierbarkeit]

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Beweisen Sie: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann gleichgradig P-integrierbar, wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl $a = a(\varepsilon)$ existiert, so dass $\sup_{n\in\mathbb{N}} E\left(|X_n| - a\right)^+ < \varepsilon$ gilt.