Prof. Dr. J. Steinebach Sommersemester 2010

11. Übungsblatt zur VL „Wahrscheinlichkeitstheorie"

Abgabe: 05.07.2010, 09.45 - 10.00 Uhr, vor dem Hörsaal des MI

Aufgabe 40 (mündlich) [Starkes Gesetz der großen Zahlen]

Die Folgen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von jeweils unabhängigen, reellen, zentrierten Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ seien *äquivalent*, d.h., es gelte $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \neq Y_n) < \infty$. Beweisen Sie: Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{EY_n^2}{n^2} < \infty$ gilt, dann genügt auch $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem starken Gesetz der großen Zahlen.

Aufgabe 41 (4 Punkte) [Null-Eins-Gesetz von Kolmogorov]

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige, reelle Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Beweisen Sie: $\overline{\lim_{n\to\infty}} X_n$ und $\underline{\lim_{n\to\infty}} X_n$ sind *degeneriert*, d.h., diese Grenzvariablen sind P-f.s. konstant.

Aufgabe 42 (4 Punkte) [Ungleichung von Ottaviani-Skorohod]

$X_1, \ldots, X_n$ $(n \in \mathbb{N})$ seien unabhängige, reelle Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Partialsummen $S_k = X_1 + \cdots + X_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Ferner gelte für festes $\varepsilon > 0$ und $0 \leq \delta < 1$ und für alle $k = 1, \ldots, n-1$ die Abschätzung $P(|S_n - S_k| \geq \varepsilon) \leq \delta$. Zeigen Sie, dass daraus folgt:

$$P\left(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq 2\varepsilon\right) \leq \frac{1}{1-\delta} P(|S_n| \geq \varepsilon).$$

Hinweis: Betrachten Sie die Ereignisse $A_k' = A_k \cap \{|S_n - S_k| < \varepsilon\}$, wobei $A_1 = \{|S_1| \geq 2\varepsilon\}$ und $A_k = \{|S_1| < 2\varepsilon, \ldots, |S_{k-1}| < 2\varepsilon, |S_k| \geq 2\varepsilon\}$ $(k = 2, \ldots n)$.

Aufgabe 43 (4 Punkte) [Konvergenz unendlicher Reihen]

Für eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängiger, reeller Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ betrachte man deren Partialsummen $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Beweisen Sie: Es gilt $S_n \xrightarrow{P} S$ $(n \to \infty)$ für eine Zufallsvariable S genau dann, wenn $S_n \xrightarrow{P-f.s.} S$ $(n \to \infty)$ für eine Zufallsvariable S gilt.

Hinweis: Sei $\varepsilon > 0$ und sei ohne Einschränkung $0 < \delta < 1$. Zeigen Sie: Es existiert ein $k = k(\delta) \in \mathbb{N}$ mit $\max_{n>k} P(|S_n - S_k| > \varepsilon/2) \leq \delta/2$. Wenden Sie dann die Ungleichung von Ottaviani-Skorohod geeignet auf die Folge $X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots$ an. Beachten Sie Aufgabe 38.