12. Übungsblatt zur VL „Wahrscheinlichkeitstheorie“

Abgabe: 12.07.2010, 09.45 - 10.00 Uhr, vor dem Hörsaal des MI

Aufgabe 44 (mündlich) [Normalverteilung]

Zeigen Sie, dass zwischen der Verteilungsfunktion Φ einer Standardnormalverteilung und deren λ^1-Dichte φ die Ungleichung $1-\Phi(x) \leq x^{-1}\varphi(x) \quad (x>0)$ besteht. Beweisen Sie, dass beide Seiten dieser Ungleichung sogar *äquivalent* sind, d.h., dass $x\left(1-\Phi(x)\right)/\varphi(x) \to 1$ für $x \to \infty$ gilt.

Aufgabe 45 (4 Punkte) [Extremwertverteilung]

Seien $X_1, \ldots, X_n \quad (n \in \mathbb{N})$ unabhängige, identisch $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Ferner sei b_n implizit definiert durch $P\left(X_1 > b_n\right) = 1/n$, sowie $M_n := \max\limits_{1 \leq k \leq n} X_k$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$b_n\left(M_n - b_n\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} G \quad (n \to \infty),$$

wobei G eine *Gumbel*-Verteilung besitzt, d.h., $P\left(G \leq x\right) = \exp\left\{-e^{-x}\right\} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Hinweis: Zeigen Sie unter Berücksichtigung von Aufgabe 44, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $P\left(X_1 > n + (x/n)\right)/P\left(X_1 > n\right) \to \exp\left\{-x\right\} \quad (n \to \infty)$.

Aufgabe 46 (4 Punkte) [Straffheit]

Seien $P_n = N\left(a_n, \sigma_n^2\right)$ mit $a_n \in \mathbb{R}$ und $\sigma_n^2 > 0 \;\; (n \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie, dass die Folge $\left\{P_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann straff ist, wenn die Folgen $\left\{a_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left\{\sigma_n^2\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt sind.

Aufgabe 47 (4 Punkte) [Charakteristische Funktionen]

Die *Cauchy*-Verteilung $C(a)$ mit Skalenparameter $a > 0$ ist eine absolut-stetige Verteilung mit der λ^1-Dichte $f_a(x) := a/\left(\pi\left(a^2+x^2\right)\right) \quad (x \in \mathbb{R})$. Beweisen Sie mittels charakteristischer Funktionen die Faltungsformel $f_a * f_b = f_{a+b} \quad (a, b > 0)$.