Präsenzübungsblatt zur VL „Wahrscheinlichkeitstheorie“

19.07.2010, 16.00 - 17.30 Uhr, Seminarraum 2 des MI

Aufgabe 48 (mündlich) Seien $\Omega \neq \emptyset$, $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ durchschnittstabil und $\mathcal{R}_0$ die kleinste Algebra in Ω, die $\mathcal{E}$ umfasst, d.h., $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_0(\mathcal{E})$. Ferner sei $\Delta \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengensystem mit $\mathcal{E} \subset \Delta \subset \mathcal{R}_0$ und

(i) $\Omega \in \Delta$;

(ii) $A \in \Delta \implies A^c \in \Delta$;

(iii) $A_1, \ldots, A_n \in \Delta$ p.d. $\implies \sum_{i=1}^{n} A_i \in \Delta$.

Zeigen Sie, dass dann $\Delta = \mathcal{R}_0$ gilt.

Hinweis: Beachten Sie den Beweis von Satz 1.2 der Vorlesung.

Aufgabe 49 (mündlich) Seien $g(x) := 1/(x \log x)$ $(x \geq 2)$ und $f_n = c_n I_{(a_n, b_n]}$ mit $c_n \geq 0$ und $2 \leq a_n \leq b_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Ferner gelte $f_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ für $x \geq 2$, sowie $f_n(x) \leq g(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $x \geq 2$. Beweisen oder widerlegen Sie: $\int_{[2,\infty)} f_n \, d\lambda^1 \to 0$ $(n \to \infty)$.

Aufgabe 50 (mündlich) Seien $X_1, \ldots, X_n$ $(n \in \mathbb{N})$ unabhängige, identisch $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Ferner sei b_n implizit definiert durch $P(X_1 > b_n) = 1/n$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$b_n / (2 \log n)^{1/2} \to 1 \quad \text{und} \quad (2 \log n)^{-1/2} \max_{1 \leq k \leq n} X_k \xrightarrow{P} 1 \quad (n \to \infty).$$

Hinweis: Beachten Sie die Aufgaben 44 und 45.