Prof. Dr. J. Steinebach Sommersemester 2010

2. Übungsblatt zur VL „Wahrscheinlichkeitstheorie “

Abgabe: 26.04.2010, 09.45 - 10.00 Uhr, vor dem Hörsaal des MI

Aufgabe 5 (mündlich) [Dynkin-System]

Sei $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Dynkin-System und $D \in \mathcal{D}$ (fest). Zeigen Sie:

(a) Für $A, B \in \mathcal{D}$, $B \subset A$, gilt: $A \setminus B \in \mathcal{D}$.

(b) $\mathcal{D}_D := \{A \subset \Omega \mid A \cap D \in \mathcal{D}\}$ ist ein Dynkin-System.

Aufgabe 6 (4 Punkte) [monotones System]

Zeigen Sie, dass ein Mengensystem $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ genau dann ein Dynkin-System ist, wenn gilt:

(i) $\Omega \in \mathcal{D}$;

(ii) $\forall\, A, B \in \mathcal{D}$ mit $B \subset A$ gilt: $A \setminus B \in \mathcal{D}$;

(iii) $\mathcal{D}$ ist ein monotones System.

Aufgabe 7 (4 Punkte) [erzeugte Systeme]

Seien $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{E})$ das von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin-System und $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{E})$ die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra. Ferner bezeichne $\mathcal{F}$ das System der endlichen Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{E}$, d.h.,

$$\mathcal{F} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} A_i \;:\; A_i \in \mathcal{E},\; i = 1, \ldots, n;\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} = \mathcal{D}$ genau dann gilt, wenn $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ ist.

Aufgabe 8 (4 Punkte) [additive Mengenfunktion]

Gegeben sei der Semiring $\mathcal{J} = \{(a, b] \;:\; 0 \le a \le b \le 1\}$ und $\mu : \mathcal{J} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ sei eine Mengenfunktion mit

$$\mu\left((a, b]\right) = \begin{cases} b - a, & 0 < a < b; \\ \infty, & 0 = a < b; \\ 0, & a = b. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) μ ist additiv, aber nicht σ-additiv.

(b) μ ist $\emptyset$-stetig, aber nicht von unten stetig.