Prof. Dr. J. Steinebach Sommersemester 2010

3. Übungsblatt zur VL „Wahrscheinlichkeitstheorie “

Abgabe: 03.05.2010, 09.45 - 10.00 Uhr, vor dem Hörsaal des MI

Aufgabe 9 (mündlich) [Fortsetzungssatz]

Sei μ ein Prämaß auf dem Ring $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ und μ^* das zugehörige äußere Maß auf $\mathcal{P}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass für p.d. Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R}$, gilt: $\lim_{n\to\infty} \mu^*\left(\sum_{k=1}^n A_k\right) = \mu^*\left(\sum_{k=1}^\infty A_k\right)$.

Aufgabe 10 (4 Punkte) [äußeres Maß]

Sei μ ein Prämaß auf dem Ring $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ und μ^* das zugehörige äußere Maß auf $\mathcal{P}(\Omega)$. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition von μ^* (vgl. Beweis zu Satz 2.1), dass zu $Q \subset \Omega$ mit $\mu^*(Q) < \infty$, ein $A \in \mathcal{A}(\mathcal{R})$ existiert, so dass gilt: $\mu^*(Q) = \mu^*(A)$.

Aufgabe 11 (3 Punkte) [μ^*-Messbarkeit, Spaltungseigenschaft]

Sei μ ein Prämaß auf dem Ring $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ und μ^* das zugehörige äußere Maß auf $\mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathcal{A}^* = \{A \subset \Omega \mid A \text{ ist } \mu^*\text{-messbar}\}$. Es seien $M, N \subset \Omega$ und es gebe $A, B \in \mathcal{A}^*$ mit $M \subset A$, $N \subset B$ und $\mu^*(A \cap B) = 0$. Zeigen Sie, dass gilt: $\mu^*(M \cup N) = \mu^*(M) + \mu^*(N)$.

Aufgabe 12 (4 Punkte) [Eindeutigkeitssatz]

Sei $\mathcal{F} := \mathcal{R}(\mathcal{J})$, wobei $\mathcal{J} = \{(a,b] : a \leq b;\, a,b \in \mathbb{R}\}$, und sei $D \subset \mathbb{R}$ eine abzählbare Teilmenge. Zeigen Sie, dass die Mengenfunktion $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $\mu(A) = |A \cap D|$ ein Prämaß auf $\mathcal{F}$ ist, das sich i.A. nicht eindeutig zu einem Maß auf $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{F})$ fortsetzen lässt.