4. Übungsblatt zur VL „Wahrscheinlichkeitstheorie "

Abgabe: 10.05.2010, 09.45 - 10.00 Uhr, vor dem Hörsaal des MI

Aufgabe 13 (mündlich) [σ-endliches Maß]

Betrachten Sie den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$. Zeigen Sie, dass das Bildmaß $T(\lambda)$ unter einer messbaren Abbildung $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i.A. *nicht* σ-endlich sein muss.

Aufgabe 14 (4 Punkte) [Produkträume, Projektionen]

Sei $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine Familie von Messräumen. Zeigen Sie, dass für $\emptyset \neq J \subset I$ die Projektion

$$p_J^I: \prod_{i \in I} \Omega_i \to \prod_{j \in J} \Omega_j, \quad \bigotimes_{i \in I} \omega_i \mapsto \bigotimes_{j \in J} \omega_j$$

messbar ist bzgl. der jeweiligen Produkt-σ-Algebren, d.h., p_J^I ist $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i$ - $\bigotimes_{j \in J} \mathcal{A}_j$ -messbar.

Aufgabe 15 (4 Punkte) [Bildmaß]

Seien $\Omega := \mathbb{R}$, $\mathcal{A} := \{A \subset \Omega \mid A \text{ oder } A^c \text{ abzählbar}\}$ und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$ mit

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & A \text{ abzählbar}, \\ 1, & A^c \text{ abzählbar}, \end{cases} \qquad A \in \mathcal{A}.$$

Weiter seien $\Omega' := \{0, 1\}$ und $\mathcal{A}' := \mathcal{P}(\Omega')$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $T: \Omega \to \Omega'$ mit $T = I_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ messbar bzgl. $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ ist und bestimmen Sie das Bildmaß $T(\mu)$ auf $\mathcal{A}'$.

Aufgabe 16 (5 Punkte) [Messbare numerische Funktioenen]

Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $f: \Omega \to \mathbb{R}$ sowie $g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Abbildungen. Fassen Sie $\mathbb{R}$, ausgestattet mit der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}$, als Messraum auf und beweisen oder widerlegen Sie:

(i) f ist messbar, falls $|f|$ messbar ist;

(ii) $|f|$ ist messbar, falls f messbar ist;

(iii) $g + h$ ist messbar, falls g und h messbar sind.