5. Übungsblatt zur VL „Wahrscheinlichkeitstheorie "

Abgabe: 17.05.2010, 09.45 - 10.00 Uhr, vor dem Hörsaal des MI

Aufgabe 17 (mündlich) [μ-Integral]

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie, dass für jede messbare Abbildung $f: \Omega \to \mathbb{N}$ gilt:

$$\int f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} k\mu(\{f = k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{f \geq k\}).$$

Aufgabe 18 (4 Punkte) [μ-Integral]

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\{A_i\}_{i=1,2,\ldots} \subset \mathcal{A}$. Für $n \in \mathbb{N}$ (fest) sei

$$B_n = \big\{\omega \in \Omega \,|\, \exists \{i_1, \ldots, i_n\} \subset \mathbb{N}: \ \omega \in A_{i_j} \ \ \forall\, j = 1, \ldots, n\big\}.$$

Zeigen Sie, dass $B_n \in \mathcal{A}$ gilt, und beweisen Sie die Ungleichung $n\mu(B_n) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Aufgabe 19 (4 Punkte) [μ-integrierbare Funktionen]

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit einem *endlichen* Maß μ und $f: \Omega \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Beweisen Sie:

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(\{|f| \geq n\}) \leq \int |f| d\mu \leq \mu(\Omega) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(\{|f| \geq n\})$.

(ii) f ist genau dann μ-integrierbar, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(\{|f| \geq n\})$ konvergiert.

Aufgabe 20 (4 Punkte) [Radon-Nikodym-Dichte]

Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und μ, ν, λ jeweils σ-endliche Maße auf $\mathcal{A}$. Zeigen Sie:

(i) Gilt $\nu \ll \mu$ und $\lambda \ll \mu$, so folgt $\nu + \lambda \ll \mu$ und

$$\frac{d(\nu + \lambda)}{d\mu} = \frac{d\nu}{d\mu} + \frac{d\lambda}{d\mu} \qquad \mu - \text{f.ü.}$$

(ii) Gilt $\nu \ll \lambda$ und $\lambda \ll \mu$, so folgt $\nu \ll \mu$ und

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{d\nu}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\mu} \qquad \mu - \text{f.ü.}$$