6. Übungsblatt zur VL „Wahrscheinlichkeitstheorie “

Abgabe: 31.05.2010, 09.45 - 10.00 Uhr, vor dem Hörsaal des MI

Aufgabe 21 (mündlich) [Transformationssatz]

Sei ν das Dichtemaß einer $N(0,1)$-Verteilung bezüglich λ^1. Bestimmen Sie die Dichte von $T(\nu)$ unter der Transformation $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto t^2$.

Aufgabe 22 (4 Punkte) [Lebesgue- und Riemann-Integral]

Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und f' beschränkt. Zeigen Sie, dass f' über $[a,b]$ Borel-messbar und λ^1-integrierbar ist und dass $\int_{[a,b]} f' d\lambda^1 = f(b) - f(a)$ gilt.

Aufgabe 23 (5 Punkte) [Konvergenz im Mittel]

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit einem *endlichen* Maß μ. Ferner seien $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, f reellwertige messbare Funktionen mit

(i) $|f_n| \leq g \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots,$ wobei $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$;

(ii) Zu jeder Teilfolge $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ von $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ existiert eine Teilfolge $\{f_{n'_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ von $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n'_k} = f \quad \mu -$ f.ü.

Zeigen Sie, dass gilt: $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$.

Aufgabe 24 (5 Punkte) [Produktraum]

Seien $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A} = \{A \subset \Omega \mid A \text{ oder } A^c \text{ abzählbar}\}$ und Δ die Diagonale von $\Omega \times \Omega$, also $\Delta = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \times \Omega : \omega_1 = \omega_2\}$. Zeigen Sie, dass die Diagonale nicht messbar ist, d.h., dass gilt: $\Delta \notin \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$.