6. Übungsblatt zur VL „Wahrscheinlichkeitstheorie “

Abgabe: 31.05.2010, 09.45 - 10.00 Uhr, vor dem Hörsaal des MI

Aufgabe 21 (mündlich) [Transformationssatz]

Sei ν das Dichtemaß einer $N(0,1)$-Verteilung bezüglich λ^1. Bestimmen Sie die Dichte von $T(\nu)$ unter der Transformation $T:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ t\mapsto t^2$.

Aufgabe 22 (4 Punkte) [Lebesgue- und Riemann-Integral]

Seien $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ differenzierbar und f' beschränkt. Zeigen Sie, dass f' über $[a,b]$ Borel-messbar und λ^1-integrierbar ist und dass $\int_{[a,b]} f'd\lambda^1 = f(b)-f(a)$ gilt.

Aufgabe 23 (5 Punkte) [Konvergenz im Mittel]

Sei $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum mit einem *endlichen* Maß μ. Ferner seien $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, f reellwertige messbare Funktionen mit

(i) $|f_n|\le g \quad \forall\, n=1,2,\ldots,$ wobei $g\in\mathcal{L}^1(\mu)$;

(ii) Zu jeder Teilfolge $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ von $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ existiert eine Teilfolge $\{f_{n'_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ von $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n'_k} = f \quad \mu-$ f.ü.

Zeigen Sie, dass gilt: $f\in\mathcal{L}^1(\mu)$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_1=0$.

Aufgabe 24 (5 Punkte) [Produktraum]

Seien $\Omega=[0,1]$, $\mathcal{A}=\{A\subset\Omega \mid A \text{ oder } A^c \text{ abzählbar}\}$ und Δ die Diagonale von $\Omega\times\Omega$, also $\Delta=\{(\omega_1,\omega_2)\in\Omega\times\Omega:\ \omega_1=\omega_2\}$. Zeigen Sie, dass die Diagonale nicht messbar ist, d.h., dass gilt: $\Delta\notin\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$.