Prof. Dr. J. Steinebach Sommersemester 2010

7. Übungsblatt zur VL „Wahrscheinlichkeitstheorie "

Abgabe: 07.06.2010, 09.45 - 10.00 Uhr, vor dem Hörsaal des MI

Aufgabe 25 (mündlich) [Produkmaß]

Gegeben sei eine reellwertige messbare Funktionen f auf einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit einem σ-endlichen Maß μ. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) $Q := \big\{(\omega, y) \in \Omega \times \mathbb{R}^1 : \; y = f(\omega)\big\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}^1$;

(b) $(\mu \otimes \lambda^1)(Q) = 0$.

Aufgabe 26 (7 Punkte) [Satz von Fubini und Tonelli]

Für $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$ sei $f(x,t) := (2\pi t)^{-1/2} \exp\big(-x^2/(2t)\big)$ und $g := \frac{\partial f}{\partial t}$. Zeigen Sie, dass

(a) f eine Lösung der *Diffusionsgleichung* $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ist;

(b) für $t > 0$ (fest) gilt: $\int_{\mathbb{R}} f(x,t) \, d\lambda^1(x) = 1$;

(c) für $s > 0$ (fest) gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{[s,\infty)} g(x,t) \, d\lambda^1(t) \, d\lambda^1(x) = -1 \qquad \text{und} \qquad \int_{[s,\infty)} \int_{\mathbb{R}} g(x,t) \, d\lambda^1(x) \, d\lambda^1(t) = 0;$$

(d) weder g^+ noch g^- integrierbar ist.

Aufgabe 27 (5 Punkte) [Unendliches Produkt von W-Maßen]

Sei $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, P_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ eine Folge von W-Räumen und sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ der Produktraum.

(a) Zeigen Sie, dass für $A_i \in \mathcal{A}_i$, $i = 1, 2, \ldots,$ gilt:

$$A := \prod_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \qquad \text{und} \qquad P(A) = \prod_{i=1}^{\infty} P_i(A_i) := \lim_{n \to \infty} \prod_{i=1}^{n} P_i(A_i).$$

(b) Bezeichne Q_n das Produktmaß auf dem Produktraum

$$\left(\prod_{i=n+1}^{\infty} \Omega_i, \bigotimes_{i=n+1}^{\infty} \mathcal{A}_i \right), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung: $P = P_1 \otimes \cdots \otimes P_n \otimes Q_n$.

(c) Zeigen Sie, dass für $f \in \mathcal{L}^1(P)$ und $n \in \mathbb{N}$ (fest) gilt:

$$\int f dP = \int \left(\int f(x_1, \ldots, x_n, y) \, dQ_n(y) \right) d\,(P_1 \otimes \cdots \otimes P_n)\,(x_1, \ldots, x_n).$$