9. Übungsblatt zur VL „Wahrscheinlichkeitstheorie“

Abgabe: 21.06.2010, 09.45 - 10.00 Uhr, vor dem Hörsaal des MI

Aufgabe 32 (mündlich) [Unabhängigkeit]

Zeigen Sie, dass zwei reelle Zufallsvariablen X und Y auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ genau dann unabhängig sind, wenn für alle beschränkten, messbaren Funktionen $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ die Gleichung $Ef(X)\,g(Y) = Ef(X)\,Eg(Y)$ gilt.

Aufgabe 33 (4 Punkte) [Unkorreliertheit]

Der Zufallsvektor (X, Y) sei absolut-stetig verteilt mit λ^2-Dichte $f = \frac{1}{\pi} I_{\{(x,y):\, x^2+y^2 \le 1\}}$. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen X und Y zwar nicht unabhängig, aber doch unkorreliert sind.

Aufgabe 34 (3 Punkte) [momenterzeugende Funktion]

Sei X eine relle Zufallsvariable mit momenterzeugender Funktion $M = M_X$. Zeigen Sie, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$P(X \ge a) \le \inf_{t \ge 0} \left\{ M(t)\, e^{-ta} \right\}.$$

Aufgabe 35 (5 Punkte) [Ungleichungen]

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen. Beweisen Sie unter der Verteilungsannahme $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$, dass für alle $0 < a < 1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \ge na \right) \le \left\{ (1-a)^{-\frac{1-a}{2}} (1+a)^{-\frac{1+a}{2}} \right\}^n \le \exp\left(-\frac{na^2}{2} \right)$$

(Spezialfall der Chernoff- bzw. Hoeffding-Ungleichung).

Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 34 und die Reihendarstellung von $a \mapsto \ln(1 \pm a)$.