Prof. Dr. Josef G. Steinebach Sommersemester 2011

1. Übungsblatt zur VL „Mathematische Statistik“

Abgabe: 11.04.2011, 09.45 - 10.00 Uhr in SR II

Aufgabe 1 (mündlich) [Konfidenzintervall]

Man nehme an, der zweiseitige Gauß-Test

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad \sqrt{n}\frac{|\bar{x}-a_0|}{\sigma_0} > z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \\ 0, & \text{falls} \quad \sqrt{n}\frac{|\bar{x}-a_0|}{\sigma_0} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \end{cases}$$

sei UMPU-Test zum Niveau α für $H: a = a_0$ gegen $K: a \neq a_0$. Bei $n = 10$ Überprüfungen einer Methode haben sich als Realisationen unabhängiger, $N(a, \sigma_0^2)-$verteilter Zufallsvariablen $(\sigma_0^2 = 16)$ folgende Werte ergeben:

$$14.7 \quad 17.6 \quad 9.8 \quad 17.2 \quad 18.5 \quad 7.4 \quad 10.5 \quad 16.4 \quad 15.2 \quad 8.7$$

Wie lautet das gleichmäßig beste unverfälschte Konfidenzintervall zum Niveau 0.95 bzw. 0.99 für den Erwartungswert a?

Aufgabe 2 (4 Punkte) [Test, Signifikanzniveau]

Seien $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_\vartheta^X)$, $\vartheta \in \Theta$, ein statistisches Modell und $T: \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ eine Statistik.
Zeigen Sie, dass ein Test zum Niveau α $(0 < \alpha < 1)$ für $H: \vartheta = \vartheta_0$ gegen $K: \vartheta \neq \vartheta_0$ der Form

$$\varphi(x) = I_{\{T(X)>c\}}(x) + \gamma I_{\{T(X)=c\}}(x), \quad x \in \mathcal{X},$$

mit $E_{\vartheta_0}\varphi(X) = \alpha$ existiert, wobei $c \in \mathbb{R}$ und $\gamma \in [0,1]$ gelte.

Hinweis: Setze $c = F^{-1}(1-\alpha)$, wobei $F(t) = P_{\vartheta_0}^X(T \leq t)$, $t \in \mathbb{R}$, und $F^{-1}(p) = \inf\{t \in \mathbb{R} | F(t) \geq p\}$, $p \in (0,1)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte) [Exponentialfamilien]

Zeigen oder widerlegen Sie, dass es sich bei den folgenden Verteilungsannahmen um Exponentialfamilien handelt und geben Sie gegebenenfalls die maximal reduzierten Dichten der Form (2.1) (siehe Vorlesung) an:

a) Gammaverteilung mit Parametern $a > 0$, $b > 0$;

b) Rechteckverteilung auf $[a, b]$, $a < b$;

c) Multinomialverteilung $M(n; p_1, \ldots, p_k)$ für festes k und n;

d) (Translatierte) Exponentialverteilung mit Parameter $\vartheta \in \mathbb{R}$ und λ^1-Dichten der Form

$$f_\vartheta(x) = \exp(-(x-\vartheta)) I_{[\vartheta,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$