Prof. Dr. Josef G. Steinebach Sommersemester 2011

1. Übungsblatt zur VL „Mathematische Statistik“

Abgabe: 11.04.2011, 09.45 - 10.00 Uhr in SR II

Aufgabe 1 (mündlich) [Konfidenzintervall]

Man nehme an, der zweiseitige Gauß-Test

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n)=\begin{cases}1, & \text{falls} \quad \sqrt{n}\frac{|\bar{x}-a_0|}{\sigma_0} > z_{1-\frac{\alpha}{2}},\\ 0, & \text{falls} \quad \sqrt{n}\frac{|\bar{x}-a_0|}{\sigma_0} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}},\end{cases}$$

sei UMPU-Test zum Niveau α für $H:\ a=a_0$ gegen $K:\ a\neq a_0$. Bei $n=10$ Überprüfungen einer Methode haben sich als Realisationen unabhängiger, $N(a,\sigma_0^2)-$verteilter Zufallsvariablen $(\sigma_0^2=16)$ folgende Werte ergeben:

$$14.7 \quad 17.6 \quad 9.8 \quad 17.2 \quad 18.5 \quad 7.4 \quad 10.5 \quad 16.4 \quad 15.2 \quad 8.7$$

Wie lautet das gleichmäßig beste unverfälschte Konfidenzintervall zum Niveau 0.95 bzw. 0.99 für den Erwartungswert a?

Aufgabe 2 (4 Punkte) [Test, Signifikanzniveau]

Seien $(\mathcal{X},\mathcal{B},P_\vartheta^X)$, $\vartheta\in\Theta$, ein statistisches Modell und $T:\ \mathcal{X}\to\mathbb{R}$ eine Statistik.
Zeigen Sie, dass ein Test zum Niveau α $(0<\alpha<1)$ für $H:\ \vartheta=\vartheta_0$ gegen $K:\ \vartheta\neq\vartheta_0$ der Form

$$\varphi(x)=I_{\{T(X)>c\}}(x)+\gamma I_{\{T(X)=c\}}(x), \quad x\in\mathcal{X},$$

mit $E_{\vartheta_0}\varphi(X)=\alpha$ existiert, wobei $c\in\mathbb{R}$ und $\gamma\in[0,1]$ gelte.

Hinweis: Setze $c=F^{-1}(1-\alpha)$, wobei $F(t)=P_{\vartheta_0}^X(T\le t)$, $t\in\mathbb{R}$, und $F^{-1}(p)=\inf\{t\in\mathbb{R}|F(t)\ge p\}$, $p\in(0,1)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte) [Exponentialfamilien]

Zeigen oder widerlegen Sie, dass es sich bei den folgenden Verteilungsannahmen um Exponentialfamilien handelt und geben Sie gegebenenfalls die maximal reduzierten Dichten der Form (2.1) (siehe Vorlesung) an:

a) Gammaverteilung mit Parametern $a>0,\ b>0$;

b) Rechteckverteilung auf $[a,b]$, $a<b$;

c) Multinomialverteilung $M(n;p_1,\ldots,p_k)$ für festes k und n;

d) (Translatierte) Exponentialverteilung mit Parameter $\vartheta\in\mathbb{R}$ und λ^1-Dichten der Form

$$f_\vartheta(x)=\exp(-(x-\vartheta))I_{[\vartheta,\infty)}(x), \quad x\in\mathbb{R}.$$