Prof. Dr. Josef G. Steinebach Sommersemester 2011

10. Übungsblatt zur VL „Mathematische Statistik"

Abgabe: 20.06.2011, 9.45 - 10.00 Uhr, in Seminarraum II des MI

Aufgabe 36 (mündlich) [Wilcoxon-Symmetrietest]

Bei der Auswertung einer Klausur wurden bei 20 zufällig ausgewählten Klausuren die folgenden Punktzahlen beobachtet:

29	49	46	32	40	82	72	22	73	76
84	54	60	30	85	55	84	67	61	92

Wie entscheiden Sie (mit Hilfe des Wilcoxon-Symmetrietests) das Testproblem

$$H: \text{„Die Punktzahlen sind symmetrisch um } \Delta = 50 \text{ verteilt."}$$

zum Niveau $\alpha = 0.05$ bei Verwendung

a) der exakten kritischen Werte,

b) der Normalapproximation.

Hinweis: Die exakten kritischen Werte $c_{n;1-\alpha}$ des Tests können Sie der folgenden Tabelle entnehmen:

n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$c_{n;0.95}$	43	51	59	68	78	88	99	110	122	135	148
$c_{n;0.975}$	45	54	62	72	82	93	105	117	129	142	156

Aufgabe 37 (4 Punkte) [Wilcoxon-Rangsummen-Test]

Die Wirkung eines neuen Mineralfutters auf die Gewichtszunahme bei Mastschweinen soll untersucht werden. Dazu wird eine Gruppe von zwanzig Schweinen zufällig in zwei Gruppen (A und B) zu je zehn Tieren aufgeteilt. Auf Gruppe A wird die neue Fütterung, auf Gruppe B die Standardfütterung angewendet. Nach vier Wochen haben sich die folgenden Gewichtszunahmen (in kg) ergeben:

Gruppe A	8.2	9.4	9.6	9.7	10.0	14.5	15.2	16.1	17.6	21.5
Gruppe B	4.2	5.2	5.8	6.4	7.0	7.3	10.1	11.2	11.3	11.5

Geben Sie das Signifikanzniveau (d.h., das α-Niveau derart, dass die Hypothese gerade noch verworfen würde) des Wilcoxon-Rangsummen-Tests an für die Hypothese, dass kein Unterschied in der Gewichtszunahme aufgrund der Fütterung besteht, gegen die Alternative, dass Gruppe A eine bessere Gewichtszunahme aufweist.

Hinweis: Verwenden Sie zur (rekursiven) Berechnung des Niveaus ein Programm Ihrer Wahl (z.B. R, Matlab,...).

[BITTE WENDEN]

Aufgabe 38 (4 Punkte) [Konfidenzintervall]

Seien $X_1, \ldots, X_m; Y_1, \ldots, Y_n$ gemäß dem Lokationsmodell des Zweistichprobenproblems. Weiterhin sei $D = (D_1, \ldots, D_{nm})$ die Ordnungsstatistik der Differenzen $Y_j - X_i$.

a) Zeigen Sie:

$$P(D_k < \Delta < D_{nm+1-k}) = P_{\Delta=0}(k \le V \le nm - k),$$

wobei V wie in Bemerkung 14.1 b) der Vorlesung definiert ist.

b) Bestimmen Sie zum Niveau $1-\alpha = \frac{20}{21}$ gemäß a) das Konfidenzintervall für die folgenden Daten:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
0.113	0.212	0.249	0.522	0.709	0.788	0.221	0.433	0.724	0.913	0.917	1.58

Hinweis: Hier gilt $P_{\Delta=0}(V \le 5) = 0.0206$ und $P_{\Delta=0}(V \le 6) = 0.0325$.

Aufgabe 39 (4 Punkte) [Spearman-Rangkorrelationstest]

Mit den Bezeichnungen des Spearman-Rangkorrelationstests sei

$$\overline{R} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i, \quad \overline{S} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i \quad \text{und} \quad L = \frac{12\sum_{i=1}^{n}(R_i - \overline{R})(S_i - \overline{S})}{n(n^2-1)}.$$

a) Zeigen Sie:

$$L = \frac{12\sum_{i=1}^{n} R_i S_i}{n(n^2-1)} - \frac{3(n+1)}{n-1} = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n}(R_i - S_i)^2}{n(n^2-1)};$$

$$\mathrm{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} R_i S_i\Big) = \frac{1}{4}\,n(n+1)^2 \quad \text{(unter Unabhängigkeit).}$$

Berechnen Sie dann $\mathrm{E}L$ und $\mathrm{Var}(L)$ unter der Unabhängigkeitshypothese. Benutzen Sie dabei, dass gilt: $\mathrm{Var}\big(\sum_{i=1}^{n} R_i S_i\big) = \frac{1}{144}\,n^2(n-1)(n+1)^2$.

b) Betrachten Sie folgendes Beispiel: Zwei Experten testen zehn Weinsorten nach zwei Merkmalen (dabei betrachtet jeder Tester ein Merkmal). Es ergibt sich das folgende Ranking:

Weinsorte	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Merkmal 1	1	5	9	7	4	6	10	2	3	8
Merkmal 2	4	3	6	8	2	7	9	1	5	10

Testen Sie auf Unabhängigkeit der Merkmale zum Niveau $\alpha = 0.05$. Benutzen Sie dabei, dass unter der Unabhängigkeitshypothese $\sqrt{n-1}\,L$ asymptotisch $N(0,1)$-verteilt ist.