

11. Übungsblatt zur VL „Mathematische Statistik“

Abgabe: 27.06.2011, 9.45 - 10.00 Uhr, in Seminarraum II des MI

Aufgabe 40 (mündlich) [Pitman-Symmetrietest]

Testen Sie mittels des Wilcoxon-Symmetrietests und des Pitman-Symmetrietests zum Niveau $\alpha = 0.01$ auf Symmetrie der Verteilung folgender Daten:

-1.497 2.651 -2.875 1.392 -2.832

Aufgabe 41 (6 Punkte) [Permutationstest]

$X_1, \dots, X_m; Y_1, \dots, Y_n$ seien unabhängige Zufallsvariablen, wobei $X_k \sim N(a, \sigma^2)$, $k = 1, \dots, m$, und $Y_\ell \sim N(a + \Delta, \sigma^2)$, $\ell = 1, \dots, n$. Geben Sie ein Konfidenzintervall für Δ an, indem Sie folgendermaßen vorgehen:

- a) Bestimmen Sie einen $\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}$ -Permutationstest für die Hypothesen $H_{\Delta_0} : \Delta = \Delta_0$ gegen $K_{\Delta_0} : \Delta \neq \Delta_0$. Wie entscheiden Sie das Testproblem für folgende Daten

x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
2.81	3.02	1.97	2.19	2.79	2.61	3.41	4.28

zum Niveau $\alpha = 0.2$ mit $\Delta_0 = 0$?

- b) Zeigen Sie: Die Menge aller Werte Δ , für die H_Δ bei gegebener Stichprobe nicht verworfen werden kann (inkl. Randomisationsbereich), bildet ein Intervall. Ein solches Intervall ist Konfidenzbereich für Δ zum Niveau $1 - \alpha$.

Aufgabe 42 (3 Punkte) [Kolmogorov-Smirnov-Test]

- a) Testen Sie mit dem exakten Kolmogorov-Smirnov-Test zum Niveau $\alpha = 0.05$, ob die folgenden Daten einer Exp(1)-Verteilung entstammen:

0.071 1.192 0.709 0.281 0.856 0.265 0.047 0.833 1.145 2.000

- b) Entstammen die folgenden Daten der selben Verteilung wie diejenigen aus dem Aufgabenteil a)? Testen Sie die Hypothese $H : F = G$ unter Verwendung des exakten sowie des asymptotischen Tests zum Niveau $\alpha = 0.05$.

0.190 0.315 0.068 0.629 0.972 1.173 1.431 0.034 0.183 0.226

[BITTE WENDEN]

Aufgabe 43 (3 Punkte) [Konsistenz des Kolmogorov-Smirnov-Tests]

$X_1, X_2, \dots$ sei eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit stetiger Verteilungsfunktion F . Für $H: F = F_0$ gegen $K: F \neq F_0$ ist der Kolmogorov-Smirnov-Test φ_n zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$ bei Stichprobenumfang n gegeben durch

$$\varphi_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \sqrt{n} D_n > K^{-1}(1 - \alpha), \\ 0, & \sqrt{n} D_n \leq K^{-1}(1 - \alpha). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass φ_n konsistent ist, d.h., dass unter K die Güte von φ_n gegen 1 konvergiert für $n \rightarrow \infty$.

Schranken für den Kolmogoroff-Smirnow-Zwei-Stichprobentest

Schranken für den Kolmogoroff-Smirnow-Ein-Stichprobentest

a) Zu vorgegebener statistischer Sicherheit $1-\alpha$ gehört bei einseitiger Fragestellung die Schranke $d_{1-\alpha;n}$ bei zweiseitiger Fragestellung die obere Schranke $d_{1-\frac{\alpha}{2};n}$. Beispiel: Zu $1-\alpha=0,90$ und $n=10$ gehört bei einseitiger Fragestellung die Schranke $d_{0,90;10}=0,3226$, bei zweiseitiger Fragestellung die obere Schranke $d_{0,95;10}=0,3687$.

b) Der Tafelwert $d_{\alpha;n}$ ist entweder die Schranke $d_{1-\alpha;n}$ zur statistischen Sicherheit $1-\alpha=p$ bei einseitiger Fragestellung oder die obere Schranke $d_{1-\frac{\alpha}{2};n}$ zur statistischen Sicherheit $1-\alpha=2p=1$ bei zweiseitiger Fragestellung. Beispiel: $d_{0,99;10}=0,3687$ ist entweder die Schranke zur statistischen Sicherheit $0,99$ bei einseitiger Fragestellung oder die obere Schranke zur statistischen Sicherheit $0,98$ bei zweiseitiger Fragestellung.

($\alpha=0,05$)

$\frac{n_1}{n_2}$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	9	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
4	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
5	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
6	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
7	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
8	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
9	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
10	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
11	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
13	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
14	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
15	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
16	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
17	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
18	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
19	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
20	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
21	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
22	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
23	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
24	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
25	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
26	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
27	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
28	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
29	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
30	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12

Für $n_1, n_2 > 30$ gilt annähernd $d_{0,975;n_1;n_2} = 1,358 \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$

n	$d_{0,90;n}$	$d_{0,95;n}$	$d_{0,975;n}$	$d_{0,99;n}$	$d_{0,995;n}$
6	0,4104	0,4680	0,5193	0,5774	0,6166
7	0,3855	0,4361	0,4834	0,5384	0,5718
8	0,3583	0,4096	0,4543	0,5065	0,5418
9	0,3391	0,3875	0,4303	0,4796	0,5133
10	0,3286	0,3687	0,4093	0,4666	0,4889
11	0,3083	0,3524	0,3912	0,4367	0,4677
12	0,2958	0,3382	0,3754	0,4192	0,4491
13	0,2847	0,3255	0,3614	0,4036	0,4325
14	0,2748	0,3142	0,3489	0,3897	0,4176
15	0,2659	0,3040	0,3376	0,3771	0,4041
16	0,2578	0,2947	0,3273	0,3657	0,3920
17	0,2504	0,2863	0,3180	0,3553	0,3809
18	0,2436	0,2785	0,3094	0,3457	0,3706
19	0,2374	0,2714	0,3014	0,3369	0,3612
20	0,2316	0,2647	0,2941	0,3287	0,3524
21	0,2262	0,2586	0,2872	0,3210	0,3443
22	0,2212	0,2528	0,2809	0,3139	0,3367
23	0,2165	0,2475	0,2749	0,3073	0,3295
24	0,2121	0,2424	0,2693	0,3010	0,3229
25	0,2079	0,2377	0,2640	0,2951	0,3166
26	0,2040	0,2332	0,2591	0,2896	0,3106
27	0,2003	0,2290	0,2544	0,2844	0,3050
28	0,1968	0,2250	0,2499	0,2794	0,2997
29	0,1935	0,2212	0,2457	0,2747	0,2947
30	0,1903	0,2176	0,2417	0,2701	0,2899
31	0,1873	0,2141	0,2379	0,2660	0,2853
32	0,1845	0,2109	0,2345	0,2619	0,2809
33	0,1817	0,2077	0,2308	0,2580	0,2768
34	0,1791	0,2047	0,2274	0,2543	0,2728
35	0,1766	0,2019	0,2243	0,2507	0,2690
40	0,1655	0,1891	0,2101	0,2349	0,2521
45	0,1562	0,1786	0,1984	0,2218	0,2380
50	0,1484	0,1696	0,1884	0,2107	0,2260
75	0,1237	0,1390	0,1544	0,1727	0,1853
100	0,1056	0,1207	0,1340	0,1499	0,1608
Näherung für $n > 35$	$\frac{1,073}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,224}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,358}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,518}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,628}{\sqrt{n}}$