Prof. Dr. Josef G. Steinebach Sommersemester 2011

11. Übungsblatt zur VL „Mathematische Statistik“

Abgabe: 27.06.2011, 9.45 - 10.00 Uhr, in Seminarraum II des MI

Aufgabe 40 (mündlich) [Pitman-Symmetrietest]

Testen Sie mittels des Wilcoxon-Symmetrietests und des Pitman-Symmetrietests zum Niveau $\alpha = 0.01$ auf Symmetrie der Verteilung folgender Daten:

-1.497 2.651 -2.875 1.392 -2.832

Aufgabe 41 (6 Punkte) [Permutationstest]

$X_1, \ldots, X_m; Y_1, \ldots, Y_n$ seien unabhängige Zufallsvariablen, wobei $X_k \sim N(a, \sigma^2)$, $k = 1, \ldots, m$, und $Y_\ell \sim N(a + \Delta, \sigma^2)$, $\ell = 1, \ldots, n$. Geben Sie ein Konfidenzintervall für Δ an, indem Sie folgendermaßen vorgehen:

a) Bestimmen Sie einen $\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}-$Permutationstest für die Hypothesen $H_{\Delta_0} : \Delta = \Delta_0$ gegen $K_{\Delta_0} : \Delta \neq \Delta_0$. Wie entscheiden Sie das Testproblem für folgende Daten

x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
2.81	3.02	1.97	2.19	2.79	2.61	3.41	4.28

zum Niveau $\alpha = 0.2$ mit $\Delta_0 = 0$?

b) Zeigen Sie: Die Menge aller Werte Δ, für die H_Δ bei gegebener Stichprobe nicht verworfen werden kann (inkl. Randomisationsbereich), bildet ein Intervall. Ein solches Intervall ist Konfidenzbereich für Δ zum Niveau $1 - \alpha$.

Aufgabe 42 (3 Punkte) [Kolmogorov-Smirnov-Test]

a) Testen Sie mit dem exakten Kolmogorov-Smirnov-Test zum Niveau $\alpha = 0.05$, ob die folgenden Daten einer Exp(1)-Verteilung entstammen:

0.071 1.192 0.709 0.281 0.856 0.265 0.047 0.833 1.145 2.000

b) Entstammen die folgenden Daten der selben Verteilung wie diejenigen aus dem Aufgabenteil a)? Testen Sie die Hypothese $H : F = G$ unter Verwendung des exakten sowie des asymptotischen Tests zum Niveau $\alpha = 0.05$.

0.190 0.315 0.068 0.629 0.972 1.173 1.431 0.034 0.183 0.226

[BITTE WENDEN]

Aufgabe 43 (3 Punkte) [Konsistenz des Kolmogorov-Smirnov-Tests]

$X_1, X_2, \ldots$ sei eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit stetiger Verteilungsfunktion F. Für $H: F = F_0$ gegen $K: F \neq F_0$ ist der Kolmogorov-Smirnov-Test φ_n zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ bei Stichprobenumfang n gegeben durch

$$\varphi_n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \sqrt{n}\, D_n > K^{-1}(1-\alpha), \\ 0, & \sqrt{n}\, D_n \leq K^{-1}(1-\alpha). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass φ_n konsistent ist, d.h., dass unter K die Güte von φ_n gegen 1 konvergiert für $n \to \infty$.

Schranken für den Kolmogoroff-Smirnow-Zwei-Stichprobentest

$n_1 n_2 d_{0,975;n_1;n_2}$ $(\alpha = 0{,}05)$

n_2 \ n_1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	9	12	12	15	18	18	21	24	27	27	30	33	33
4	12	12	16	18	21	24	27	28	32	32	36	40	41
5	12	16	20	20	25	27	31	35	35	40	42	45	50
6	15	18	20	24	29	32	36	38	42	42	48	52	54
7	18	21	25	29	35	35	40	43	45	11	52	56	61
8	18	24	27	32	35	40	45	46	50	56	59	62	66
9	21	27	31	36	40	45	45	52	57	60	64	67	72
10	24	28	35	38	43	46	52	60	59	64	68	72	75
11	27	32	35	42	45	50	57	59	66	56	73	79	83
12	27	32	40	42	51	56	60	64	66	72	80	84	90
13	30	36	42	48	52	59	64	68	73	80	78	88	94
14	33	40	45	52	56	62	67	72	79	84	88	98	97
15	33	41	50	54	61	66	72	75	83	90	94	97	105
16	36	44	50	58	63	72	76	82	88	92	99	104	113
17	39	47	53	61	67	72	81	86	92	98	104	109	114
18	42	48	57	66	70	78	81	90	96	102	108	114	120
19	43	52	60	66	74	80	88	93	100	106	113	120	126
20	45	56	60	70	78	84	91	100	105	112	117	124	130
21	48	56	65	72	84	88	96	100	111	117	124	133	135
22	48	60	68	76	83	92	100	106	110	122	129	136	143
23	51	61	70	79	87	97	103	111	118	124	133	141	148
24	51	64	73	84	91	96	108	116	122	132	138	144	153
25	57	67	75	84	94	103	112	120	128	132	144	149	155
26	57	68	79	88	98	106	117	124	131	140	143	154	162
27	60	72	83	93	100	111	117	129	134	144	153	159	168
28	63	76	85	96	105	112	124	132	141	148	157	168	173
29	63	76	86	97	110	118	127	134	144	153	163	167	181
30	66	80	90	102	112	122	132	140	149	156	166	174	180

Für $n_1, n_2 > 30$ gilt annähernd $d_{0,975;n_1;n_2} = 1{,}358 \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$

Schranken für den Kolmogoroff-Smirnow-Ein-Stichprobentest

a) Zu vorgegebener statistischer Sicherheit $1-\alpha$ gehört bei einseitiger Fragestellung die Schranke $d_{1-\alpha;n}$, bei zweiseitiger Fragestellung die obere Schranke $d_{1-\frac{\alpha}{2};n}$. Beispiel: Zu $1-\alpha = 0{,}90$ und $n = 10$ gehört bei einseitiger Fragestellung die Schranke $d_{0,90;10} = 0{,}3226$, bei zweiseitiger Fragestellung die obere Schranke $d_{0,95;10} = 0{,}3687$.

b) Der Tafelwert $d_{p,n}$ ist entweder die Schranke $d_{1-\alpha;n}$ zur statistischen Sicherheit $1-\alpha = p$ bei einseitiger Fragestellung oder die obere Schranke $d_{1-\frac{\alpha}{2};n}$ zur statistischen Sicherheit $1-\alpha = 2p-1$ bei zweiseitiger Fragestellung. Beispiel: $d_{0,95;10} = 0{,}3687$ ist entweder die Schranke zur statistischen Sicherheit 0,95 bei einseitiger Fragestellung oder die obere Schranke zur statistischen Sicherheit 0,90 bei zweiseitiger Fragestellung.

n	$d_{0,90;n}$	$d_{0,95;n}$	$d_{0,975;n}$	$d_{0,99;n}$	$d_{0,995;n}$
6	0,4104	0,4680	0,5193	0,5774	0,6166
7	0,3815	0,4361	0,4834	0,5384	0,5758
8	0,3583	0,4096	0,4543	0,5065	0,5418
9	0,3391	0,3875	0,4300	0,4796	0,5133
10	0,3226	0,3687	0,4093	0,4566	0,4889
11	0,3083	0,3524	0,3912	0,4367	0,4677
12	0,2958	0,3382	0,3754	0,4192	0,4491
13	0,2847	0,3255	0,3614	0,4036	0,4325
14	0,2748	0,3142	0,3489	0,3897	0,4176
15	0,2659	0,3040	0,3376	0,3771	0,4042
16	0,2578	0,2947	0,3273	0,3657	0,3920
17	0,2504	0,2863	0,3180	0,3553	0,3809
18	0,2436	0,2785	0,3094	0,3457	0,3706
19	0,2374	0,2714	0,3014	0,3369	0,3612
20	0,2316	0,2647	0,2941	0,3287	0,3524
21	0,2262	0,2586	0,2872	0,3210	0,3443
22	0,2212	0,2528	0,2809	0,3139	0,3367
23	0,2165	0,2475	0,2749	0,3073	0,3295
24	0,2121	0,2424	0,2693	0,3010	0,3229
25	0,2079	0,2377	0,2640	0,2952	0,3166
26	0,2040	0,2332	0,2591	0,2896	0,3106
27	0,2003	0,2290	0,2544	0,2844	0,3050
28	0,1968	0,2250	0,2499	0,2794	0,2997
29	0,1935	0,2212	0,2457	0,2747	0,2947
30	0,1903	0,2176	0,2417	0,2702	0,2899
31	0,1873	0,2141	0,2379	0,2660	0,2853
32	0,1845	0,2109	0,2342	0,2619	0,2809
33	0,1817	0,2077	0,2308	0,2580	0,2768
34	0,1791	0,2047	0,2274	0,2543	0,2728
35	0,1766	0,2019	0,2243	0,2507	0,2690
40	0,1655	0,1891	0,2101	0,2349	0,2521
45	0,1562	0,1786	0,1984	0,2218	0,2380
50	0,1484	0,1696	0,1884	0,2107	0,2260
75	0,1217	0,1390	0,1544	0,1727	0,1853
100	0,1056	0,1207	0,1340	0,1499	0,1608
Näherung für $n > 35$	$\frac{1{,}073}{\sqrt{n}}$	$\frac{1{,}224}{\sqrt{n}}$	$\frac{1{,}358}{\sqrt{n}}$	$\frac{1{,}518}{\sqrt{n}}$	$\frac{1{,}628}{\sqrt{n}}$