12. Übungsblatt zur VL „Mathematische Statistik"

Abgabe: 04.07.2011, 9.45 - 10.00 Uhr, in Seminarraum II des MI

Aufgabe 44 (mündlich) [Abstandsmaße]

Geben Sie Folgen von Verteilungsfunktionen $\{F_n\},\ F$ an, so dass gilt:

a) $\lim_{n\to\infty} d_{KS}(F_n, F) = 0$, aber $d_{M_2}(F_n, F)$ $\big(d_{L_2}(F_n, F)\big)$ konvergiert nicht gegen 0;

b) $\lim_{n\to\infty} d_{M_2}(F_n, F) = 0$ (bzw. $\lim_{n\to\infty} d_{L_2}(F_n, F) = 0$), aber $d_{KS}(F_n, F)$ konvergiert nicht gegen 0.

Hierbei sind die obigen Abstandsmaße wie in Lemma 17.1 und Bemerkung 17.1 der Vorlesung definiert.

Aufgabe 45 (3 Punkte) [Differenzierbarkeit statistischer Funktionale]

Sei d eine Metrik auf $\mathcal{F}$, die durch eine Norm auf $\mathcal{D}$ induziert wird. Zeigen Sie, dass aus der d-Fréchet-Differenzierbarkeit eines Funktionals $T: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ auch dessen d-Hadamard-Differenzierbarkeit folgt.

Aufgabe 46 (6 Punkte) [M-Schätzer]

Neben dem „getrimmten Mittel" $\big($Beispiel 17.2 d) der Vorlesung$\big)$ führte Huber (1964) den zu

$$\rho(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-t)^2, & |x-t| \le C, \\ C|x-t| - \frac{1}{2}C^2, & |x-t| > C, \end{cases}$$

gehörigen M-Schätzer ein ($C > 0$, fest). Seien nun $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte reelle Zufallsvariablen mit stetiger, positiver und um s_0 $(\in \mathbb{R})$ symmetrischer Dichte f, zugehöriger Verteilungsfunktion F und empirischer Verteilungsfunktion F_n.

a) Geben Sie $\psi(x,t)$ und $T(F)$ an. Wie sieht die bestimmende Gleichung für $T(F_n)$ aus?

b) Zeigen Sie: $\sqrt{n}\big(T(F_n) - T(F)\big) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma_F^2)$ für $n \to \infty$. Bestimmen Sie σ_F^2.

Aufgabe 47 (3 Punkte) [Kernschätzer]

Sei K eine Kernfunktion (i.A. keine W-Dichte) auf $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1)$ mit beschränktem Träger, $\int K(u)\,du = 1$, $\int u^j K(u)\,du = 0$ $(j = 1, \ldots, r;\ r \in \mathbb{N})$, $\int K^2(u)\,du < \infty$, $\int |u|^{r+\alpha}|K(u)|\,du < \infty$, $0 < \alpha \le 1$. Ferner sei f eine r-mal differenzierbare W-Dichte, deren r-te Ableitung *lokal Lipschitz*(α)*-stetig* sei, d.h., es existieren ein $L \in \mathcal{L}_2$ und $\delta > 0$, so dass für $|y - x| \le \delta$ gilt

$$\big|f^{(r)}(y) - f^{(r)}(x)\big| \le L(x)|y-x|^\alpha.$$

Für die Bandweite h gelte $h \to 0$ und $nh \to \infty$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie, dass für den Kernschätzer $\hat{f}_n$ gemäß (17.7) der Vorlesung gilt:

$$\int \mathrm{E}\big(\hat{f}_n(x) - f(x)\big)^2\,dx = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{nh} + h^{2(r+\alpha)}\Big) \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$