Prof. Dr. Josef G. Steinebach Sommersemester 2011

2. Übungsblatt zur VL „Mathematische Statistik"

Abgabe: 18.04.2011, 09.45 - 10.00 Uhr in SR II

Aufgabe 4 (mündlich) [Suffizienz]

Ist $T: (\mathcal{X}, \mathcal{B}) \to (\mathcal{T}, \mathcal{D})$ eine suffiziente Statistik für $\mathcal{P}^X$ und $g: (\mathcal{T}, \mathcal{D}) \to (\widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathcal{D}})$ derart, dass $g^{-1}(\widetilde{\mathcal{D}}) = \mathcal{D}$ gilt, so ist auch $\widetilde{T} = g \circ T$ suffizient für $\mathcal{P}^X$.

Aufgabe 5 (4 Punkte) [Exponentialfamilien, Regularitätseigenschaften]

Gegeben sei eine einparametrige Exponentialfamilie in natürlicher Parametrisierung, d.h. mit ν-Dichten

$$\frac{dP_\gamma^X}{d\nu}(x) = c(\gamma) \exp\{\gamma\, T(x)\} \quad \nu - \text{f.ü.}$$

Sei γ_0 ein innerer Punkt von $\widetilde{\Gamma}$. Zeigen Sie, dass in einer Umgebung des Nullpunkts gilt:

$$M_{\gamma_0}(s) = E_{\gamma_0}\, e^{s\,T(X)} = \frac{c(\gamma_0)}{c(\gamma_0 + s)}.$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) [Suffizienz]

Seien X und Y unabhängige, π_λ-verteilte Zufallsvariablen mit $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass die Statistik $T(X, Y) = X + Y$ suffizient ist für λ.

Aufgabe 7 (4 Punkte) [Neyman-Kriterium]

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ eine W-Dichte bzgl. λ^1. Für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, existiere $c(a, b)$, so dass

$$f_{a,b}(x) = c(a, b) f(x) I_{[a,b]}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

wieder eine W-Dichte ist. Zeigen Sie:

Sind die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. mit Dichte $f_{a,b}$ und setzt man $X^{(1)} := \min_{i=1,\dots,n} X_i$ und $X^{(2)} := \max_{i=1,\dots,n} X_i$, so ist

$$T(X) = T(X_1, \dots, X_n) = \big(X^{(1)}, X^{(2)}\big)$$

eine suffiziente Statistik für

$$\mathcal{P}^X = \mathcal{P}^{X_1, \dots, X_n} = \Big\{ \bigotimes_{i=1}^n f_{a,b}\, \lambda^1 \;\Big|\; a, b \in \mathbb{R}, a < b \Big\}.$$