Prof. Dr. Josef G. Steinebach Sommersemester 2011

3. Übungsblatt zur VL „Mathematische Statistik“

Abgabe: 26.04.2011, 10.00 - 11.00 Uhr in Raum 134 (Büro Fremdt/Schmitz) des MI

Aufgabe 9 (mündlich) [Natürliche Parametrisierung]

In n unabhängigen Beobachtungen mit jeweils genau $k+1$ möglichen Ergebnissen sei p_i für $i = 0, 1, \ldots, k$ die Wahrscheinlichkeit des i-ten Ergebnisses. Sei X_i die Anzahl der Beobachtungen, in denen das i-te Ergebnis eintritt.

Zeigen Sie, dass $T(X) = (X_1, \ldots, X_k)$ eine vollständige und suffiziente Statistik ist für den Parameter $\vartheta = (p_1, \ldots, p_k)$.

Aufgabe 10 (2 Punkte) [Suffizienz, Vollständigkeit]

Seien $(X_{11}, \ldots, X_{1n_1}, X_{21}, \ldots, X_{2n_2})$ unabhängige Zufallsvariablen, wobei $X_{ij} \sim N(a, \sigma_i^2)$ für $j = 1, \ldots, n_i$ und $i = 1, 2$ gelte. Ferner sei $\vartheta = (a, \sigma_1^2, \sigma_2^2) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)^2$.

Zeigen Sie, dass die $\lambda^{n_1+n_2}$-Dichte der Verteilung von $(X_{11}, \ldots, X_{1n_1}, X_{21}, \ldots, X_{2n_2})$ die Dichte einer vierparametrigen Exponentialfamilie ist und geben Sie eine für $\vartheta \in \Theta$ suffiziente Statistik an. Ist diese Statistik vollständig?

Aufgabe 11 (4 Punkte) [Kovarianzmethode von Rao]

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, $R[0, \vartheta]$-verteilte Zufallsvariablen $(\vartheta > 0)$. Zeigen Sie, dass $d(x_1, \ldots, x_n) = \frac{n+1}{n} \max_{1 \le i \le n} x_i$ ein UMVU-Schätzer ist für $\vartheta \in (0, \infty)$.

Aufgabe 12 (6 Punkte) [Cramér-Rao-Ungleichung]

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, $\pi(\vartheta)$-verteilte Zufallsvariablen $(\vartheta > 0)$.

a) Zeigen Sie, dass $x \longmapsto T(x) = \sum_{i=1}^n x_i$ suffizient und vollständig ist für $\vartheta \in (0, \infty)$.

b) Geben Sie einen UMVU-Schätzer an für $\vartheta \in (0, \infty)$.

c) Ist dieser Schätzer effizient?

Frohe Ostern!