4. Übungsblatt zur VL „Mathematische Statistik“

Abgabe: 02.05.2011, 9.45 - 10.00 Uhr, in Seminarraum II des MI

Aufgabe 13 (mündlich) [Maximum-Likelihood-Schätzer]

Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, $R[c-d, c+d]$-verteilte Zufallsvariablen, wobei $(c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für (c, d).

Aufgabe 14 (6 Punkte) [Fisher-Information, Effizienz]

Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, $\pi(\vartheta)$-verteilte Zufallsvariablen $(\vartheta > 0)$.

a) Zeigen Sie, dass $d^{(n)}(X) = d(X_1, \dots, X_n) = n^{-2} \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 - n^{-2} \sum_{i=1}^n X_i$ ein UMVU-Schätzer für $\gamma(\vartheta) = \vartheta^2$ ist.

b) Bestimmen Sie die Fisher-Information $I(\vartheta)$ von $P_\vartheta^{X_1}$.

c) Zeigen Sie mit Hilfe der δ-Methode (vgl. Skript zur „Stochastik I“, SS 2007, Kap. 23), dass $d^{(n)}(X)$ ein „asymptotisch effizienter Schätzer“ für $\gamma(\vartheta)$ ist.

d) Berechenen Sie EX_1^3 und EX_1^4 und zeigen Sie, dass die Cramér-Rao-Schranke nur asymptotisch angenommen wird, d.h., es gilt $\operatorname{Var}\left(d^{(n)}(X)\right) > (nI(\vartheta))^{-1}$ für alle festen $n \in \mathbb{N}$, aber $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Var}\left(d^{(n)}(X)\right) / (nI(\vartheta))^{-1} = 1$.

Aufgabe 15 (6 Punkte) [Maximum-Likelihood-Methode]

In der (x, y)-Ebene liege auf der Geraden $y = 1$ eine Strahlenquelle, die Strahlen gleichmäßig in alle Richtungen aussendet. Aufgrund von n unabhängigen Beobachtungen X_k $(k = 1, \dots, n)$ der Auftreffpunkte auf der Geraden $y = 0$ ist die x-Koordinate ϑ der Quelle zu schätzen.

a) Zeigen Sie, dass die Auftreffpunkte auf der Geraden $y = 0$ einer Cauchy-Verteilung genügen.

b) Berechnen Sie die Fisher-Information $I(\vartheta)$ von $P_\vartheta^{X_1}$.

c) Bestimmen Sie für $n = 1, 2$ mittels des Maximum-Likelihood-Prinzips einen Schätzer für ϑ.

Hinweis: Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{(z^2+1)^3} dz = \frac{\pi}{8}.$$