

5. Übungsblatt zur VL „Mathematische Statistik“

Abgabe: 09.05.2011, 9.45 - 10.00 Uhr, in Seminarraum II des MI

Aufgabe 16 (mündlich) [UMP-Test]

$X_1, \dots, X_n$ seien i.i.d. exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert $\lambda > 0$. Bestimmen Sie (ohne Benutzung von Satz 8.1 der Vorlesung) einen UMP-Test für $H : \lambda \geq \lambda_0$ gegen $K : \lambda < \lambda_0$ ($\lambda_0 > 0$).

Aufgabe 17 (4 Punkte) [Maximum-Likelihood-Schätzer, Randmaxima]

$X_1, \dots, X_n$ seien unabhängige, $N(\vartheta, 1)$ -verteilte Zufallsvariablen, wobei $\vartheta \in \mathbb{R}_+$. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\vartheta}_n$ für ϑ und zeigen Sie, dass $\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)$ im Allgemeinen nicht asymptotisch normalverteilt ist.

Aufgabe 18 (4 Punkte) [Cramér-Rao-Schranke]

Sei $\mathcal{P}^X = \{P_\vartheta^X = f_\vartheta(x)\mu : \vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$, Θ offen, mit

- (i) $\frac{\partial}{\partial \vartheta} f_\vartheta(x)$ messbar μ -f.ü. $\forall \vartheta \in \Theta$;
- (ii) $\frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f_\vartheta(x)$ messbar μ -f.ü. $\forall \vartheta \in \Theta$;
- (iii) $0 < E_\vartheta \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f_\vartheta(X) \right)^2 < \infty \quad \forall \vartheta \in \Theta$;
- (iv) $\frac{\partial}{\partial \vartheta} \int f_\vartheta(x)\mu(dx) = \int \frac{\partial}{\partial \vartheta} f_\vartheta(x)\mu(dx) \quad \forall \vartheta \in \Theta$.

Ferner sei $\gamma = \gamma(\vartheta)$ differenzierbar und $d = d(X)$ ein erwartungstreuer Schätzer für $\gamma = \gamma(\vartheta)$ mit

$$(v) \quad \frac{\partial}{\partial \vartheta} \int d(x) f_\vartheta(x) \mu(dx) = \int d(x) \frac{\partial}{\partial \vartheta} f_\vartheta(x) \mu(dx) \quad \forall \vartheta \in \Theta.$$

Zeigen Sie:

a)

$$\text{Var}(d(X)) \geq \frac{(\gamma'(\vartheta))^2}{E_\vartheta \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f_\vartheta(X) \right)^2}.$$

b) Falls die untere Varianzschranke angenommen wird, so gilt

$$d(X) = \gamma(\vartheta) + \frac{(\gamma'(\vartheta))^2}{E_\vartheta \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f_\vartheta(X) \right)^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f_\vartheta(X) \quad P_\vartheta\text{-f.s.}$$

Aufgabe 19 (4 Punkte) [Neyman-Pearson-Ansatz]

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $P_\vartheta(N = n) = (1 - \vartheta)^{n-1}\vartheta$. Geben Sie einen UMP-Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ für $H : \vartheta = \frac{1}{2}$ gegen $K : \vartheta = \frac{1}{4}$ an. Wie entscheiden Sie sich bei beobachtetem $N = 5$? Berechnen Sie die Güte des Tests.