6. Übungsblatt zur VL „Mathematische Statistik“

Abgabe: 16.05.2011, 9.45 - 10.00 Uhr, in Seminarraum II des MI

Aufgabe 20 (mündlich) [zweiseitige Hypothesen]

Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, $N(a_0, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen, wobei a_0 bekannt ist. Geben Sie einen „möglichst optimalen“ Test für die Hypothesen $H: \sigma^2 = \sigma_0^2$ gegen $K: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ an.

Aufgabe 21 (4 Punkte) [UMP-Test]

Die Beta-Verteilung ist absolut-stetig mit λ^1-Dichte

$$f_{\lambda,\mu}(x) = \frac{\Gamma(\lambda+\mu+2)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\mu+1)} x^\lambda (1-x)^\mu I_{(0,1)}(x), \quad \lambda, \mu > -1.$$

Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, Beta(λ, μ_0)-verteilte Zufallsvariablen, wobei μ_0 bekannt ist. Geben Sie einen UMP-Test für die Hypothesen $H: \lambda \leq \lambda_0$ gegen $K: \lambda > \lambda_0$ zum Niveau 0.05 an.

(a) Verwerfen Sie für $\lambda_0 = 1,\ \mu_0 = 1,\ n = 1,\ x_1 = 0.9$ die Hypothese H?

(b) Verwerfen Sie für $\lambda_0 = 0,\ \mu_0 = 0,\ n = 2,\ x_1 = 0.95,\ x_2 = 0.7$ die Hypothese H?

Hinweis: $\int_0^{0.13535} f_{1,1}(x)dx \approx 0.05$

Aufgabe 22 (4 Punkte) [UMP-Test]

Es seien $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $R[0, \vartheta]$-verteilt.

a) Zeigen Sie, dass für die Hypothesen $H_1: \vartheta \leq \vartheta_0,\ K_1: \vartheta > \vartheta_0$ jeder Test φ mit

(i) $E_{\vartheta_0}\varphi(X) = \alpha$,

(ii) $E_\vartheta \varphi(X) \leq \alpha$ für $\vartheta \leq \vartheta_0$ und

(iii) $\varphi(x) = 1$ für $\max(x_1, \dots, x_n) > \vartheta_0$

bereits UMP-Test zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ ist. Geben Sie einen solchen UMP-Test an.

b) Seien nun $H_2: \vartheta = \vartheta_0$, und $K_2: \vartheta \neq \vartheta_0$. Zeigen Sie, dass folgender Test UMP-Test zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ ist:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \max(x_1, \dots, x_n) > \vartheta_0 \quad \text{oder} \quad \max(x_1, \dots, x_n) \leq \vartheta_0 \alpha^{1/n}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

[BITTE WENDEN]

Aufgabe 23 (4 Punkte) [Randomisierung]

Für $\lambda > 0$ sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$, wobei die X_i für $i = 1, \ldots, n$ unabhängige, $\pi(\lambda)$-verteilte Zufallsvariablen sind.

a) Bringen Sie die Bedingungen an die kritischen Werte c_j^* und die Randomisierungswahrscheinlichkeiten γ_j^* beim zweiseitigen Test für $H: \lambda = \lambda_0$ gegen $K: \lambda \neq \lambda_0$ in eine Form, die derjenigen am Ende von Beispiel 9.2 entspricht.

b) Wie entscheiden Sie das Testproblem $H: \lambda = 0.6$ gegen $K: \lambda \neq 0.6$ für $\alpha = 0.05$ bei 15 Realisationen mit $\sum_{j=1}^{15} x_j = 3$? (Verwenden Sie einen $\frac{\alpha}{2}$ - $\frac{\alpha}{2}$ - Test.)