7. Übungsblatt zur VL „Mathematische Statistik“

Abgabe: 23.05.2011, 9.45 - 10.00 Uhr, in Seminarraum II des MI

Aufgabe 24 (mündlich) [LQ-Test]

Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, $N(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen. Bestimmen Sie den LQ-Test für $H: \sigma = \sigma_0$ gegen $K: \sigma \neq \sigma_0$.

Aufgabe 25 (4 Punkte) [UMPU-Test, zweiseitige Hypothesen]

T_n/ϑ habe eine χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden $(\vartheta > 0)$. Seien $H: \vartheta = 1$ und $K: \vartheta \leq \frac{1}{2} \quad \vee \quad \vartheta \geq 2$. Bestimmen Sie n so, dass ein UMPU-Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ eine Güte ≥ 0.9 besitzt.

Hinweis: Sei f_n die Dichte der χ^2_n-Verteilung und

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x < c_1 \text{ oder } x > c_2, \\ 0, & c_1 \leq x \leq c_2. \end{cases}$$

Dabei seien c_1 und c_2 aus den Gleichungen $\int_{c_1}^{c_2} f_n(y)dy = 1-0.05$ und $\int_{c_1}^{c_2} f_{n+2}(y)dy = 1-0.05$ (vgl. Aufgabe 20) bestimmt, wobei f_n die Dichte einer χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden bezeichnet. Dann ergibt sich für $n = 35, \dots, 47$ mit $\beta_n(\vartheta) = \mathrm{E}_\vartheta \varphi(T_n)$ die Tabelle von Seite 2 und es lässt sich zeigen, dass $\beta_n(\vartheta)$ strikt fallend für $\vartheta \leq 1$ und strikt wachsend für $\vartheta \geq 1$ ist (vgl. Satz 2.69, Witting (1985)).

Aufgabe 26 (4 Punkte) [Mehrparametrige Exponentialfamilien]

Für $k = 1, 2$ seien $\{X_{k\ell}\}_{\ell=1,\dots,n_k}$ unabhängige $\pi(\lambda_k)$-verteilte Zufallsvariablen. Bestimmen Sie einen UMPU-Test zum Niveau α für $H: \lambda_1 = \lambda_2$ gegen $K: \lambda_1 \neq \lambda_2$.

Aufgabe 27 (4 Punkte) [Transformation auf nicht-bedingte Tests]

Seien $(X_{11}, \dots, X_{1n_1}, X_{21}, \dots, X_{2n_2})$ unabhängige Zufallsvariablen, wobei $X_{ij} \sim N(a_i, \sigma^2)$ für $j = 1, \dots, n_i$ und $i = 1, 2$ gelte. Bestimmen Sie (nicht-bedingte) UMPU-Tests für

a) $H: a_1 \leq a_2$ gegen $K: a_1 > a_2$,

b) $H: a_1 = a_2$ gegen $K: a_1 \neq a_2$.

Hinweis: Setzen Sie $u = \sum_{k=1}^{n_1} X_{1k}$, $v_2 = \sum_{k=1}^{n_1} X_{1k} + \sum_{\ell=1}^{n_2} X_{2\ell}$ und $v_3 = \sum_{k=1}^{n_1} X_{1k}^2 + \sum_{\ell=1}^{n_2} X_{2\ell}^2$ und zeigen Sie, dass die Transformation $\tilde{U} = f \circ h$ auf eine $t_{n_1+n_2-2}$-Verteilung führt, wobei

$$h(u, v_1, v_2) = \sqrt{\frac{n_1(n_1+n_2)}{n_2}} \frac{\frac{u}{n_1} - \frac{v_2}{n_1+n_2}}{\sqrt{v_3 - \frac{v_2^2}{n_1+n_2}}} \quad \text{und} \quad f(x) = \sqrt{n-2}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

[BITTE WENDEN]

n	c_1	c_2	$\beta_n(\frac{1}{2})$	$\beta_n(2)$
35	21.001	54.157	.807	.828
36	21.771	55.386	.819	.838
37	22.543	56.613	.830	.847
38	23.319	57.836	.841	.856
39	24.097	59.057	.852	.864
40	24.879	60.275	.861	.871
41	25.663	61.490	.871	.879
42	26.449	62.703	.879	.886
43	27.238	63.913	.887	.892
44	28.029	65.121	.895	.898
45	28.823	66.327	.902	.904
46	29.619	67.530	.909	.910
47	30.417	68.731	.915	.915