

8. Übungsblatt zur VL „Mathematische Statistik“

Abgabe: 30.05.2011, 9.45 - 10.00 Uhr, in Seminarraum II des MI

Aufgabe 28 (mündlich) [Kategorielle Daten]

Sie werfen gleichzeitig 5 identische Münzen, bei denen jeweils mit Wahrscheinlichkeit p „Kopf“ auftritt, und stellen fest, ob j -mal „Kopf“ geworfen wurde ($j = 0, \dots, 5$). Bei 200 Durchführungen dieses Experiments erhalten Sie die folgenden Ergebnisse:

# „Kopf“	0	1	2	3	4	5
Häufigkeit	2	45	80	47	20	6

- a) Testen Sie zum Niveau $\alpha = 0.01$ die Hypothese, dass die einzelnen Münzen eine Binomialverteilung mit Parameter $p = 0.5$ besitzen.
- b) Testen Sie zum Niveau $\alpha = 0.01$ die Hypothese, dass die einzelnen Münzen eine Binomialverteilung mit (unbekanntem) Parameter p besitzen.

Aufgabe 29 (3 Punkte) [LQ-Test]

Bestimmen Sie für die nebenstehende diskrete Verteilung einer Zufallsvariablen X den LQ-Test für $H : \vartheta = 0$ gegen $K : \vartheta \in (0, 1)$ zum Niveau $\alpha = \frac{1}{6}$. Wie lautet die Gütefunktion dieses Tests? Können Sie einen Test zum Niveau $\alpha = \frac{1}{6}$ mit gleichmäßig besserer Gütefunktion angeben?

x	$f(x; 0)$	$f(x; \vartheta), \vartheta \in (0, 1)$
x_1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}\vartheta$
x_2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}(1 - \vartheta)$
x_3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
x_4	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

Aufgabe 30 (4 Punkte) [Zweistichprobenproblem]

$X_{11}, \dots, X_{1n_1}; X_{21}, \dots, X_{2n_2}$ seien unabhängige Zufallsvariablen, wobei X_{ij} für $i = 1, 2$ und $j = 1, \dots, n_i$ eine $N(a_i, \sigma^2)$ -Verteilung besitze. Bestimmen Sie den LQ-Test zum Niveau α für $H : a_1 = a_2$ gegen $K : a_1 \neq a_2$ und zeigen Sie, dass dieser äquivalent ist zu dem UMPU-Test aus Aufgabe 27.

Aufgabe 31 (5 Punkte) [LQ-Test]

Es seien X_1, \dots, X_n unabhängig und identisch verteilt mit Dichte

$$f_{\mu, \lambda_0}(x) = \frac{1}{\lambda_0} \exp\left(-\frac{x - \mu}{\lambda_0}\right), \quad x \in [\mu, \infty),$$

wobei $\lambda_0 > 0$ bekannt sei und $\mu \in \mathbb{R}$. Geben Sie für bekanntes $\mu_0 \in \mathbb{R}$ den LQ-Test für $H : \mu = \mu_0$ gegen $K : \mu > \mu_0$ zum Niveau α an.

[BITTE WENDEN]

α -Fraktile der zentralen χ_r^2 -Verteilung

α r	0,99	0,95	0,90	0,10	0,05	0,01
1	—	0,004	0,016	2,706	3,841	6,635
2	0,020	0,103	0,211	4,605	5,991	9,210
3	0,115	0,352	0,584	6,251	7,815	11,345
4	0,297	0,711	1,064	7,779	9,488	13,277
5	0,554	1,145	1,610	9,236	11,071	15,086
6	0,872	1,635	2,204	10,645	12,592	16,812
7	1,239	2,167	2,833	12,017	14,067	18,475
8	1,646	2,733	3,490	13,362	15,507	20,090
9	2,088	3,325	4,168	14,684	16,919	21,666
10	2,558	3,940	4,865	15,987	18,307	23,209
11	3,053	4,575	5,578	17,275	19,675	24,725
12	3,571	5,226	6,304	18,549	21,026	26,217
13	4,107	5,892	7,042	19,812	22,362	27,688
14	4,660	6,571	7,790	21,064	23,685	29,141
15	5,229	7,261	8,547	22,307	24,996	30,578
16	5,812	7,962	9,312	23,542	26,296	32,000
17	6,408	8,672	10,085	24,769	27,587	33,409
18	7,015	9,390	10,865	25,989	28,869	34,805
19	7,633	10,117	11,651	27,204	30,144	36,191
20	8,260	10,851	12,443	28,412	31,410	37,566
25	11,524	14,611	16,473	34,382	37,652	44,314
30	14,954	18,493	20,599	40,256	43,773	50,892
40	22,164	26,509	29,051	51,805	55,758	63,691
50	29,707	34,764	37,689	63,167	67,505	76,154
100	70,065	77,929	82,358	118,498	124,342	135,807

(aus Witting, H. (1978) „Mathematische Statistik“, Teubner, Stuttgart)