Prof. Dr. Josef G. Steinebach Sommersemester 2011

**8. Übungsblatt zur VL „Mathematische Statistik“**

Abgabe: 30.05.2011, 9.45 - 10.00 Uhr, in Seminarraum II des MI

**Aufgabe 28** (mündlich) [Kategorielle Daten]

Sie werfen gleichzeitig $5$ identische Münzen, bei denen jeweils mit Wahrscheinlichkeit $p$ „Kopf“ auftritt, und stellen fest, ob $j$-mal „Kopf“ geworfen wurde $(j = 0, \ldots, 5)$. Bei $200$ Durchführungen dieses Experiments erhalten Sie die folgenden Ergebnisse:

| # „Kopf“ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Häufigkeit | 2 | 45 | 80 | 47 | 20 | 6 |

a) Testen Sie zum Niveau $\alpha = 0.01$ die Hypothese, dass die einzelnen Münzen eine Binomialverteilung mit Parameter $p = 0.5$ besitzen.

b) Testen Sie zum Niveau $\alpha = 0.01$ die Hypothese, dass die einzelnen Münzen eine Binomialverteilung mit (unbekanntem) Parameter $p$ besitzen.

**Aufgabe 29** (3 Punkte) [LQ-Test]

Bestimmen Sie für die nebenstehende diskrete Verteilung einer Zufallsvariablen $X$ den LQ-Test für $H: \vartheta = 0$ gegen $K: \vartheta \in (0,1)$ zum Niveau $\alpha = \frac{1}{6}$. Wie lautet die Gütefunktion dieses Tests? Können Sie einen Test zum Niveau $\alpha = \frac{1}{6}$ mit gleichmäßig besserer Gütefunktion angeben?

| $x$ | $f(x;0)$ | $f(x;\vartheta),\ \vartheta \in (0,1)$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{3}\vartheta$ |
| $x_2$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{3}(1-\vartheta)$ |
| $x_3$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $x_4$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{6}$ |

**Aufgabe 30** (4 Punkte) [Zweistichprobenproblem]

$X_{11}, \ldots, X_{1n_1}; X_{21}, \ldots, X_{2n_2}$ seien unabhängige Zufallsvariablen, wobei $X_{ij}$ für $i = 1, 2$ und $j = 1, \ldots, n_i$ eine $N(a_i, \sigma^2)$-Verteilung besitze. Bestimmen Sie den LQ-Test zum Niveau $\alpha$ für $H: a_1 = a_2$ gegen $K: a_1 \neq a_2$ und zeigen Sie, dass dieser äquivalent ist zu dem UMPU-Test aus Aufgabe 27.

**Aufgabe 31** (5 Punkte) [LQ-Test]

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit Dichte

$$f_{\mu,\lambda_0}(x) = \frac{1}{\lambda_0} \exp\left(-\frac{x-\mu}{\lambda_0}\right), \quad x \in [\mu, \infty),$$

wobei $\lambda_0 > 0$ bekannt sei und $\mu \in \mathbb{R}$. Geben Sie für bekanntes $\mu_0 \in \mathbb{R}$ den LQ-Test für $H: \mu = \mu_0$ gegen $K: \mu > \mu_0$ zum Niveau $\alpha$ an.

[BITTE WENDEN]

**$\alpha$-Fraktile der zentralen $\chi^2_r$-Verteilung**

| $r$ \ $\alpha$ | 0,99 | 0,95 | 0,90 | 0,10 | 0,05 | 0,01 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | — | 0,004 | 0,016 | 2,706 | 3,841 | 6,635 |
| 2 | 0,020 | 0,103 | 0,211 | 4,605 | 5,991 | 9,210 |
| 3 | 0,115 | 0,352 | 0,584 | 6,251 | 7,815 | 11,345 |
| 4 | 0,297 | 0,711 | 1,064 | 7,779 | 9,488 | 13,277 |
| 5 | 0,554 | 1,145 | 1,610 | 9,236 | 11,071 | 15,086 |
| 6 | 0,872 | 1,635 | 2,204 | 10,645 | 12,592 | 16,812 |
| 7 | 1,239 | 2,167 | 2,833 | 12,017 | 14,067 | 18,475 |
| 8 | 1,646 | 2,733 | 3,490 | 13,362 | 15,507 | 20,090 |
| 9 | 2,088 | 3,325 | 4,168 | 14,684 | 16,919 | 21,666 |
| 10 | 2,558 | 3,940 | 4,865 | 15,987 | 18,307 | 23,209 |
| 11 | 3,053 | 4,575 | 5,578 | 17,275 | 19,675 | 24,725 |
| 12 | 3,571 | 5,226 | 6,304 | 18,549 | 21,026 | 26,217 |
| 13 | 4,107 | 5,892 | 7,042 | 19,812 | 22,362 | 27,688 |
| 14 | 4,660 | 6,571 | 7,790 | 21,064 | 23,685 | 29,141 |
| 15 | 5,229 | 7,261 | 8,547 | 22,307 | 24,996 | 30,578 |
| 16 | 5,812 | 7,962 | 9,312 | 23,542 | 26,296 | 32,000 |
| 17 | 6,408 | 8,672 | 10,085 | 24,769 | 27,587 | 33,409 |
| 18 | 7,015 | 9,390 | 10,865 | 25,989 | 28,869 | 34,805 |
| 19 | 7,633 | 10,117 | 11,651 | 27,204 | 30,144 | 36,191 |
| 20 | 8,260 | 10,851 | 12,443 | 28,412 | 31,410 | 37,566 |
| 25 | 11,524 | 14,611 | 16,473 | 34,382 | 37,652 | 44,314 |
| 30 | 14,954 | 18,493 | 20,599 | 40,256 | 43,773 | 50,892 |
| 40 | 22,164 | 26,509 | 29,051 | 51,805 | 55,758 | 63,691 |
| 50 | 29,707 | 34,764 | 37,689 | 63,167 | 67,505 | 76,154 |
| 100 | 70,065 | 77,929 | 82,358 | 118,498 | 124,342 | 135,807 |

(aus Witting, H. (1978) „Mathematische Statistik“, Teubner, Stuttgart)