Prof. Dr. Josef G. Steinebach Sommersemester 2011

9. Übungsblatt zur VL „Mathematische Statistik“

Abgabe: 06.06.2011, 9.45 - 10.00 Uhr, in Seminarraum II des MI

Aufgabe 32 (mündlich) [Unabhängigkeit, Kontingenztafel]

Nach einer Klausur wurden in einer Befragung für jeden Kandidaten die Merkmale “Hilfsmittel” (A_1: “Hat ohne Hilfsmittel gearbeitet”, A_2: “Hat mit eigenen Aufzeichnungen gearbeitet”, A_3: “Hat abgeschrieben”) und “Note” (B_1: “1 - 2”, B_2: “3 - 4”, B_3: “5”) ermittelt. Dabei ergaben sich die nebenstehenden Häufigkeiten. Sind die Merkmale unabhängig (Niveau 0.05) ?

	A_1	A_2	A_3
B_1	0	10	0
B_2	4	20	7
B_3	4	2	3

Aufgabe 33 (4 Punkte) [χ^2-Asymptotik]

Gegeben sei das Einstichprobenproblem (12.1) der Vorlesung mit der Nullhypothese H gemäß (12.3) und T gemäß (12.5) mit $s = 2$.

a) Verwenden Sie den Zentralen Grenzwertsatz im Reellen, um die asymptotische χ^2_1-Verteilung von T unter H zu zeigen.

b) Nun werde p_j in (12.5) durch einen konsistenten Schätzer $\hat{p}_{n,j}$ ersetzt, wobei gelte:

$$|\hat{p}_{n,j} - p_j| = o_P\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Zeigen Sie, dass die asymptotische Verteilung von T unter H erhalten bleibt.

Aufgabe 34 (4 Punkte) [χ^2-Anpassungstest]

Bei 1 000 Realisationen einer diskret verteilten Zufallsvariablen X erhielten Sie folgende Ergebnisse:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	15
$\#\{\nu : X_\nu = k\}$	419	234	146	84	44	31	11	14	11	2	3	1

Testen Sie zum Niveau $\alpha = 0.05$, ob der Stichprobe eine geometrische Verteilung zugrunde liegt? Lösen Sie die Aufgabe sowohl mit Hilfe der ML-Schätzung als auch (numerisch) über die Minimum-χ^2-Schätzung.

Aufgabe 35 (4 Punkte) [Ränge, Ordnungsstatistiken]

Zeigen Sie, dass unter den Voraussetzungen von Lemma 14.1 der Vektor $Z_{(N)} := (Z_{1:N}, \ldots, Z_{N:N})$ der “Ordnungsstatistiken” und der “Rangvektor” $R := (R_1, \ldots, R_N)$ stochastisch unabhängig sind.