1. Übungsblatt zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Abgabe: Dienstag, 10.04.2012, 9.45 – 10.00 Uhr, in Raum 134

Aufgabe 1.1 (mündlich) [Existenzsatz von Kolmogorov]
Beweisen Sie die Existenz des folgenden Wiener-Prozesses mit Drift:

$$X_t = x + \mu t + \sigma W_t, \quad t \geq 0, \quad x, \mu, \sigma \in \mathbb{R}, \quad \sigma \neq 0,$$

wobei $\{W_t\}_{t\geq 0}$ den Standard-Wiener-Prozess bezeichnet.

Aufgabe 1.2 (4 Punkte) [Modifikationen, Ununterscheidbarkeit]
Seien $\{X_t\}_{t\in T}$ und $\{Y_t\}_{t\in T}$ stochastische Prozesse auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Zustandsraum $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. $\{X_t\}_{t\in T}$ heißt *Modifikation* von $\{Y_t\}_{t\in T}$ (auch $\{X_t\}_{t\in T}$ und $\{Y_t\}_{t\in T}$ sind *Modifikationen*) genau dann, wenn

$$P(X_t = Y_t) = 1 \quad \forall\, t \in T.$$

Die Prozesse werden als *ununterscheidbar* bezeichnet, falls

$$P(X_t = Y_t \ \ \forall\, t \in T) = 1.$$

Seien nun $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und $T = \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass zwei Modifikationen mit rechtsstetigen Pfaden ununterscheidbar sind.

Aufgabe 1.3 (4 Punkte) [Markov-Ketten]
Seien $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen iid ZV und $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to Z$ eine messbare Funktion. Sei weiter X_0 eine von $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige ZV mit Werten in $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass der Prozess $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$X_{n+1} = f(X_n, Z_{n+1}), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

die (elementare) Markov-Eigenschaft besitzt.