10. Übungsblatt zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Abgabe: Montag, 18.06.2012, 9.50 Uhr, in Seminarraum 2

Aufgabe 10.1 (mündlich) [Amerikanische Optionen]
Gegeben sei eine amerikanische Put-Option auf eine Aktie mit Anfangswert $S_0 = 50$ Euro. Die Option mit Ausübungspreis $K = 52$ Euro hat eine Laufzeit von 2 Jahren und der (zeitstetige) Zins beträgt $R = 0.05$. Bestimmen Sie den heutigen Wert der Option aus einem zweiperiodigen Binomialmodell mit $a = -0.2$ und $b = 0.2$.

Aufgabe 10.2 (3 Punkte) [Volatilität im CRR-Modell]
Sei S eine Aktie mit Startpreis S_0, erwarteter Rendite μ und Volatilität σ (jeweils bezogen auf ein Jahr).

a) Bestimmen Sie für ein einperiodiges Binomialmodell die Werte p, $u = 1 + b$ und $d = 1 + a$ so, dass die erwartete Rendite in diesem Modell der erwarteten Rendite der Aktie und die Volatilität näherungsweise der Volatilität der Aktie entspricht.

b) Sei nun $S_0 = 50$ Euro, $\sigma = 0.3$ und der zeitdiskrete Zinssatz $r = 0.05$. Bestimmen Sie den heutigen Wert der Put-Option aus Aufgabe 10.1 in einem zweiperiodigen Binomialmodell mit angepasster Volatilität wie in a), jedoch in einem risikoneutralen Modell.

Hinweis: Verwenden Sie die Approximation $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

Aufgabe 10.3 (4 Punkte) [Stochastische Integration]
Sei $\{W_t\}_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ bezüglich einer Filterung $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$ und mit stetigen Pfaden. Desweiteren sei $\{H_t\}_{0\leq t\leq T}$ ein Elementarprozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. Zeigen Sie folgende Eigenschaften:

a) Der Prozess $\left\{ \int_0^t H_s dW_s \right\}_{0\leq t\leq T}$ ist wohldefiniert und ein stetiges Martingal bzgl. $\{\mathcal{A}_t\}_{0\leq t\leq T}$.

b) $E\left(\int_0^t H_s dW_s \right)^2 = E\left(\int_0^t H_s^2 ds \right)$.

c) $E\left(\sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t H_s dW_s \right|^2 \right) \leq 4E\left(\int_0^t H_s^2 ds \right)$.

[BITTE WENDEN]

Aufgabe 10.4 (5 Punkte) [Black-Scholes-Modell]
Für den Aktienkurs $S_{1,t}$ gelte für $0 \leq t \leq T$ nun das folgende Black-Scholes-Modell:

$$S_{1,t} = S_{1,0}\, e^{R_t} \qquad \text{mit} \qquad R_t = \mu t + \sigma W_t, \quad \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0,$$

wobei $\{W_t\}_{t \geq 0}$ einen Wiener-Prozess bezeichnet und T einem Jahr entspricht.

Berechnen Sie näherungsweise den aktuellen Wert einer europäischen Call-Option auf diese Aktie mit Ausübungspreis $K = 78$ Euro, wenn die Option in 2 Monaten ausgeübt werden kann. Der aktuelle Kurs der Aktie liege bei 115.56 Euro, $\mu = 0.155$, $\sigma = 0.4$ und für den Zinssatz gelte $r = 3.35\,\%$.

Hinweis: Benutzen sie das Black-Scholes-Modell um näherungsweise die Werte a und b für das Einperiodenmodell aus Aufgabe 9.4 (mit Periodenlänge 1 Monat) zu bestimmen. Nehmen Sie hierzu an, dass $R_{1/12}$ die diskreten Werte $E(R_{1/12}) \pm \sqrt{\mathrm{Var}(R_{1/12})}$ annimmt.