# 11. Übungsblatt zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Abgabe: Montag, 25.06.2012, 9.50 Uhr, in Seminarraum 2

**Aufgabe 11.1** (mündlich) [Variation einer Abbildung]
Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion. Zeigen Sie, dass $f$ genau dann endliche Variation besitzt, wenn es zwei monoton wachsende Funktionen $g, h : I \to \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt:

$$f = g - h.$$

**Aufgabe 11.2** (3+3+3 Punkte) [Approximation durch Elementarprozesse]
Sei $\{H_t\}_{0\le t\le T}$ ein reellwertiger, an $\{\mathcal{A}_t\}_{0\le t\le T}$ adaptierter und progressiv-messbarer Prozess mit

$$E\left(\int_0^T H_t^2 dt\right) < \infty.$$

Zeigen Sie, dass eine approximierende Folge $\big\{\{H_t^{(n)}\}_{0\le t\le T}\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementarprozessen existiert, so dass gilt:

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\int_0^T |H_s^{(n)} - H_s|^2 ds\right) = 0.$$

Unterscheiden Sie hierzu die Fälle:

a) $\{H_t\}_{0\le t\le T}$ ist stetig und beschränkt,

b) $\{H_t\}_{0\le t\le T}$ ist progressiv-messbar und beschränkt,

c) $\{H_t\}_{0\le t\le T}$ ist progressiv-messbar.

**Aufgabe 11.3** (3 Punkte) [Stochastisches Integral]
Sei $\{H_t\}_{0\le t\le T}$ ein reellwertiger, an $\{\mathcal{A}_t\}_{0\le t\le T}$ adaptierter und progressiv-messbarer Prozess mit

$$\int_0^T H_t^2 dt < \infty \qquad \text{P-f.s..}$$

Zeigen Sie, dass aus

$$E\left(\sup_{0\le t\le T}\left(\int_0^t H_s dW_s\right)^2\right) < \infty$$

folgt

$$E\left(\int_0^T H_t^2 dt\right) < \infty.$$