11. Übungsblatt zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Abgabe: Montag, 25.06.2012, 9.50 Uhr, in Seminarraum 2

Aufgabe 11.1 (mündlich) [Variation einer Abbildung]
Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann endliche Variation besitzt, wenn es zwei monoton wachsende Funktionen $g, h : I \to \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt:

$$f = g - h.$$

Aufgabe 11.2 (3+3+3 Punkte) [Approximation durch Elementarprozesse]
Sei $\{H_t\}_{0\le t\le T}$ ein reellwertiger, an $\{\mathcal{A}_t\}_{0\le t\le T}$ adaptierter und progressiv-messbarer Prozess mit

$$E\Big(\int_0^T H_t^2 dt\Big) < \infty.$$

Zeigen Sie, dass eine approximierende Folge $\big\{\{H_t^{(n)}\}_{0\le t\le T}\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementarprozessen existiert, so dass gilt:

$$\lim_{n\to\infty} E\Big(\int_0^T |H_s^{(n)} - H_s|^2 ds\Big) = 0.$$

Unterscheiden Sie hierzu die Fälle:

a) $\{H_t\}_{0\le t\le T}$ ist stetig und beschränkt,

b) $\{H_t\}_{0\le t\le T}$ ist progressiv-messbar und beschränkt,

c) $\{H_t\}_{0\le t\le T}$ ist progressiv-messbar.

Aufgabe 11.3 (3 Punkte) [Stochastisches Integral]
Sei $\{H_t\}_{0\le t\le T}$ ein reellwertiger, an $\{\mathcal{A}_t\}_{0\le t\le T}$ adaptierter und progressiv-messbarer Prozess mit

$$\int_0^T H_t^2 dt < \infty \qquad \text{P-f.s..}$$

Zeigen Sie, dass aus

$$E\Big(\sup_{0\le t\le T}\Big(\int_0^t H_s dW_s\Big)^2\Big) < \infty$$

folgt

$$E\Big(\int_0^T H_t^2 dt\Big) < \infty.$$