Prof. Dr. Josef G. Steinebach SS 2012

12. Übungsblatt zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Abgabe: Montag, 02.07.2012, 9.50 Uhr, in Seminarraum 2

Im Folgenden bezeichne $\{W_t\}_{t\geq 0}$ einen Wiener-Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ bezüglich der Filterung $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{A}$ und mit stetigen Pfaden.

Aufgabe 12.1 (mündlich) [Partielle stochastische Integration]
Zeigen Sie, dass gilt:

$$\int_0^t (t-s)dW_s = \int_0^t W_s ds \quad \text{für alle} \quad t \geq 0.$$

Aufgabe 12.2 (4 Punkte) [Stochastische Differentialgleichung]
Sei $\{H_t\}_{0\leq t\leq T} \in \widetilde{\mathcal{H}}$ und sei $\{X_t\}_{0\leq t\leq T}$ gegeben durch

$$X_t = \int_0^t H_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t H_s^2 ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Zeigen Sie, dass der Prozess

$$Z_t = \exp(X_t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

die stochastische Differentialgleichung

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s H_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T,$$

erfüllt.

Aufgabe 12.3 (4 Punkte) [Black-Scholes-Formel für zeitabhängige Parameter]
Für den Asset-Prozess $\{S_t\}_{0\leq t\leq T}$ gelte

$$dS_t = S_t\{\mu(t)dt + \sigma(t)dW_t\}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

wobei $\mu(\cdot)$ und $\sigma(\cdot)$ deterministische, stetige Funktionen auf $[0, T]$ sind und

$$\inf_{0\leq t\leq T} \sigma(t) > 0.$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$S_t = S_0 \exp\Big(\int_0^t \mu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds\Big).$$