3. Übungsblatt zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Abgabe: Montag, 23.04.2012, 9.50 Uhr, in Seminarraum 2

Aufgabe 3.1 (mündlich) [Faltungshalbgruppe]
Zeigen Sie, dass die Brown'sche Halbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ mit

$$\mu_0 = \varepsilon_0, \quad \mu_t = N(0,t), \quad t > 0,$$

eine Faltungshalbgruppe ist.

Aufgabe 3.2 (4 Punkte) [Operatoren-Halbgruppe eines Markov-Prozesses]
Eine Familie $\{T(t) : t \geq 0\}$ beschränkter linearer Operatoren auf einem Banach-Raum L heißt (Operatoren-) Halbgruppe, falls

$$\begin{aligned} &\text{(i) } T(0)f = f \quad \text{für alle } f \in L, \\ &\text{(ii) } T(s+t)f = T(s) \circ T(t)f \quad \text{für alle } f \in L \text{ und } s,t \geq 0. \end{aligned}$$

Sei nun $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ ein Markov-Prozess auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Zustandsraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und Übergangswahrscheinlichkeiten $P_t(x,C)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $C \in \mathcal{B}$. Ferner bezeichne $B(\mathbb{R})$ den Banach-Raum der beschränkten, Borel-messbaren, reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ und

$$T(t)f := \int f(y) P_t(x, dy) \quad \forall f \in B(\mathbb{R}) \quad t \geq 0.$$

Zeigen Sie, dass $\{T(t) : t \geq 0\}$ eine Operatoren-Halbgruppe auf $B(\mathbb{R})$ bildet.

Aufgabe 3.3 (4 Punkte) [infinitesimaler Erzeuger]
Seien $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zwei unabhängige i.i.d. Folgen exponentialverteilter Zufallsvariablen mit Parameter λ bzw. μ. Betrachten Sie nun ein System mit zwei Zuständen (An (0), Aus (1)), das zunächst für die Zeit X_1 an ist, dann für die Zeit Y_1 aus, dann wieder für die Zeit X_2 an, usw.. Zeigen Sie, dass sich dieses System als Markov-Prozess modellieren lässt und geben Sie den zugehörigen infinitesimalen Erzeuger an.

Aufgabe 3.4 (4 Punkte) [Operatoren-Halbgruppe]
Sei $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein reellwertiger Markov-Prozess mit Anfangsverteilung μ und zugehöriger Operatoren-Halbgruppe $\{T(t) : t \geq 0\}$ auf $B(\mathbb{R})$ gemäß Aufgabe 3.2. Zeigen Sie, dass durch μ und $\{T(t) : t \geq 0\}$ die endlich-dimensionalen Verteilungen des Prozesses eindeutig festgelegt sind.