Prof. Dr. Josef G. Steinebach SS 2012

4. Übungsblatt zur Vorlesung „Stochastische Prozesse"

Abgabe: Montag, 30.04.2012, 9.50 Uhr, in Seminarraum 2

Aufgabe 4.1 (mündlich) [Markov-Prozess in stetiger Zeit]
Geben Sie für den Markov-Prozess aus Aufgabe 3.3 die Übergangswahrscheinlichkeit $p_{00}(t)$ explizit an.

Aufgabe 4.2 (4 Punkte) [unabhängige Zuwächse]
Sei $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein stochastischer Prozess mit unabhängigen Zuwächsen und kanonischer Filtration $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$. Zeigen Sie, dass für alle $0 \leq s < t$ der Zuwachs $X_t - X_s$ unabhängig von $\mathcal{A}_s$ ist.

Aufgabe 4.3 (2 Punkte) [unbegrenzt teilbare Verteilungen]
Sei $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein stochastischer Prozess mit Zustandsraum $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ und mit unabhängigen, stationären Zuwächsen. Weiterhin gelte $X_0 = 0$ P-f.s.. Zeigen Sie, dass die endlich-dimensionalen Verteilungen des Prozesses unbegrenzt teilbar sind.

Aufgabe 4.4 (3+3 Punkte) [Poisson-Prozess]
Sei $\{N_t\}_{t\geq 0}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität λ.

a) Zeigen Sie, dass der *kompensierte Poisson-Prozess* $\{N_t - \lambda t\}_{t\geq 0}$ ein Martingal bzgl. der kanonischen Filterung ist.

b) Zeigen Sie, dass für alle $c > 0$ gilt:

$$\limsup_{t\to\infty} P\Big(\sup_{0\leq s\leq t} (N_s - \lambda s) \geq c\sqrt{\lambda t}\Big) \leq \frac{1}{c\sqrt{2\pi}}.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Stirling'sche Formel.