5. Übungsblatt zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Abgabe: Montag, 07.05.2012, 9.50 Uhr, in Seminarraum 2

Aufgabe 5.1 (mündlich) [Stoppzeiten]
Seien τ und σ Stoppzeiten bezüglich der Filtration $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$. Zeigen Sie:

$$\mathcal{A}_{\tau\wedge\sigma} = \mathcal{A}_\tau \cap \mathcal{A}_\sigma.$$

Aufgabe 5.2 (3 Punkte) [Orthogonalität von Martingal-Zuwächsen]
Sei $\{M_t\}_{t\geq 0}$ ein quadratintegrierbares Martingal (d.h. $E(M_t^2) < \infty \; \forall\, t \geq 0$) mit kanonischer Filterung $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$. Beweisen Sie

$$E(Y(M_t - M_s)) = 0 \quad \text{für alle } \mathcal{A}_s\text{-messbaren Zufallsvariablen } Y,\ 0 \leq s \leq t,$$

und zeigen Sie damit

$$E((M_t - M_s)^2 | \mathcal{A}_s) = E(M_t^2 | \mathcal{A}_s) - M_s^2 \quad P\text{-f.s.}, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Aufgabe 5.3 (3 Punkte) [Optional Sampling Theorem]
Zeigen Sie, dass ein rechtsstetiger reellwertiger Prozess $\{X_t\}_{t\geq 0}$ mit zugehöriger kanonischer Filtration $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$ genau dann ein Submartingal ist, wenn für jedes Paar $\tau \geq \sigma$ beschränkter Stoppzeiten bzgl. der kanonischen Filtration gilt

$$E(X_\tau) \geq E(X_\sigma).$$

Aufgabe 5.4 (3+3 Punkte) [Rechtsstetige (Sub-)Martingale]
Beweisen Sie die Korollare 4.1 und 4.2 der Vorlesung.