6. Übungsblatt zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Abgabe: Montag, 14.05.2012, 9.50 Uhr, in Seminarraum 2

Aufgabe 6.1 (mündlich) [Hölder-Stetigkeit]
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine auf einem kompakten Intervall $I \subset \mathbb{R}$ von der Ordnung $\gamma > 0$ lokal Hölder-stetige Funktion. Zeigen Sie die Existenz reeller Zahlen $\delta, C > 0$, für die gilt

$$\sup_{s,t\in I,\ |s-t|<\delta} |f(s) - f(t)| \le C|s-t|^{\gamma}.$$

Aufgabe 6.2 (3+3 Punkte) [Produkträume]
Sei $\{X_t, t \in T\}$, $T \subset \mathbb{R}$, eine Familie reellwertiger Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und sei $A \in \mathcal{A}(X_t, t \in T)$. Zeigen Sie:

a) Falls für $\omega' \in \Omega$ und $\omega \in A$ gilt, dass $X_t(\omega') = X_t(\omega)$ für alle $t \in T$, so liegt ω' in A.

b) Es existiert eine abzählbare Teilmenge S von T, für die gilt $A \in \mathcal{A}(X_t, t \in S)$.

Aufgabe 6.3 (3 Punkte) [Nichtmessbarkeit der Menge der stetigen Pfade]
Beweisen Sie mit Hilfe von Aufgabe 6.2, dass $\mathcal{C}[0,\infty)$ nicht in $(\mathcal{B}^1)^{[0,\infty)}$ enthalten ist.

Aufgabe 6.4 (3 Punkte) [Existenz stetiger Modifikationen]
Zeigen Sie, dass für einen Wiener-Prozess $\{W_t\}_{t\ge 0}$ gilt

$$E|W_t - W_s|^{2n} = c_n|t-s|^n,$$

wobei c_n eine von n abhängende Konstante ist (vgl. Bemerkung 6.2.b)), und bestimmen Sie c_n (z.B. mit Hilfe der momenterzeugenden Funktion von W_1).