7. Übungsblatt zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Abgabe: Montag, 21.05.2012, 9.50 Uhr, in Seminarraum 2

Aufgabe 7.1 (mündlich) [Poisson-Prozess]
Sei $\{N_t\}_{t\geq 0}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität λ. Beweisen Sie mit Hilfe der Submartingal-Ungleichungen, dass für $t \to \infty$ gilt

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow{P} \lambda.$$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 4.4.

Aufgabe 7.2 (4 Punkte) [Poisson-Prozess]
Sei $\{N_t\}_{t\geq 0}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität λ und isotonen Pfaden. Beweisen Sie, dass für $t \to \infty$ gilt

$$\frac{N_t}{t} \longrightarrow \lambda \quad P\text{-f.s.} \qquad \text{und} \qquad \frac{N_t - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z,$$

wobei $Z \overset{\mathcal{D}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$.

Aufgabe 7.3 (4 Punkte) [Separabilität]
Sei $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein reellwertiger, separabler stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie:

a) $\big\{\omega \in \Omega : \ t \mapsto X_t(\omega) \text{ ist stetig in } t_0\big\} \in \mathcal{A}$ für alle $t_0 \geq 0$.

b) $\big\{\omega \in \Omega : \ t \mapsto X_t(\omega) \text{ ist gleichmäßig stetig auf } [0,\infty)\big\} \in \mathcal{A}$.

Aufgabe 7.4 (4 Punkte) [gleichgradige Integrierbarkeit]
Sei $\{X_n\}_{n\geq 1}$ ein inverses Submartingal bzgl. der absteigenden Filtration $\{\mathcal{A}_n\}_{n\geq 1}$. Zeigen Sie, dass die Familie $\{X_n\}_{n\geq 1}$ gleichgradig integrierbar ist, falls $\liminf_{n\to\infty} E(X_n) > -\infty$ gilt.