Prof. Dr. Josef G. Steinebach SS 2012

8. Übungsblatt zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Abgabe: Montag, 04.06.2012, 9.50 Uhr, in Seminarraum 2

Aufgabe 8.1 (3 Punkte) [Ersteintrittszeiten des Wiener-Prozesses]
Seien $\{W_t\}_{t\geq 0}$ ein eindimensionaler Wiener-Prozess mit stetigen Pfaden und

$$\tau_a = \inf\{t \geq 0 : W_t \geq a\}$$

für $a > 0$. Zeigen Sie über die Dichte der Stoppzeit τ_a, dass $E(\tau_a) = \infty$ gilt.
Hinweis: Verwenden Sie dazu die Folgerungen aus Satz 9.3.

Aufgabe 8.2 (4 Punkte) [Erstaustrittszeiten des Wiener-Prozesses]
Seien $\{W_t^{(d)}\}_{t\geq 0}$ ein d-dimensionaler Wiener-Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit stetigen Pfaden und

$$\tau_r = \inf\{t \geq 0 : |W_t^{(d)}| = r\}$$

für $r > 0$. Zeigen, Sie dass gilt

$$E\tau_r = r^2/d, \quad \text{insbesondere} \quad P(\tau_r < \infty) = 1.$$

Hinweise:

a) Zeigen Sie zunächst, dass $\lim_{n\to\infty} P(\tau_r > n) = 0$ und $P(\tau_r < \infty) = 1$ gilt.

b) Betrachten Sie

$$E|W_t^{(d)}|^2 = E|W_t^{(d)}|^2 I\{\tau_r \leq n\} + E|W_t^{(d)}|^2 I\{\tau_r > n\} = I_{n1} + I_{n2}$$

und zeigen Sie mithilfe von Satz 9.3, dass gilt

$$I_{n1} = E[r^2 + d(n - \tau_r)] I\{\tau_r \leq n\}.$$

Aufgabe 8.3 (1,5 + 3 + 1,5 + 1,5 + 1,5 Punkte) [Pfade des Wiener-Prozesses]
Seien $\{W_t\}_{t\geq 0}$ ein eindimensionaler Wiener-Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit stetigen Pfaden und

$$Z_\omega = \{t \in [0, \infty) : W_t(\omega) = 0\}$$

für $\omega \in \Omega$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen P-f.s. erfüllt sind:

a) Z_ω besitzt Lebesgue-Maß 0;

b) 0 ist Häufungspunkt von Z_ω;

c) Z_ω ist abgeschlossen und unbeschränkt;

d) Z_ω liegt in keinem Intervall $I \subset [0, \infty)$ dicht;

e) der Wiener-Prozess nimmt jeden Punkt $a \in \mathbb{R}$ unendlich oft an.

Hinweise:

a) Benutzen Sie den Satz von Fubini.

b) Betrachten Sie

$$\tau_+ = \inf\{t \geq 0 : W_t \in (0, \infty)\} \qquad \text{und} \qquad \tau_- = \inf\{t \geq 0 : W_t \in (-\infty, 0)\}$$

und benutzen Sie dazu die Nichtdifferenzierbarkeit der Pfade sowie das Blumenthal'sche 0-1-Gesetz, d.h., sei $\{W_t\}_{t\geq 0}$ ein eindimensionaler Wiener-Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit stetigen Pfaden und kanonischer Filtration $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$, so gilt für alle $A \in \bigcap_{t>0} \mathcal{A}_t$: $P(A) \in \{0, 1\}$.

c) Benutzen Sie Teil b) um die Unbeschränktheit zu zeigen.

d) Benutzen Sie, dass die Pfade von unbeschränkter Variation sind.

e) Benutzen Sie das Gesetz vom iterierten Logarithmus und Teil c).

Aufgabe 8.4 (mündlich) [No-Arbitrage-Prinzip]
Gehen Sie von einem Markt aus, in dem das No-Arbitrage-Prinzip gilt und in dem Aktienleerverkäufe möglich sind (d.h. Aktien können geliehen und dann verkauft werden). Zeigen Sie: Haben zwei Portfolios morgen, unabhängig von der Marktentwicklung, den gleichen Wert, so besitzen sie auch heute den gleichen Wert.

Aufgabe 8.5 (1+2+1+4 Punkte) [europäische und amerikanische Call-/Put-Optionen]
Die oberen Indizes a bzw. e kennzeichnen amerikanische bzw. europäische Optionen. Es gelte das No-Arbitrage-Prinzip und r sei die risikolose Zinsrate. Zeigen bzw. begründen Sie:

a) $C_t^a \geq C_t^e$ und $P_t^a \geq P_t^e$ für $0 \leq t \leq T$;

b) $\max(0, S_t - K) \leq C_t^a \leq S_t$ und $\max(0, K - S_t) \leq P_t^a \leq K$ für $0 \leq t \leq T$;

c) $C_t^e \leq S_t$ und $P_t^e \leq r^{-(T-t)}K$ für $0 \leq t \leq T$;

d) $\max(0, S_t - r^{-(T-t)}K) \leq C_t^e$ und $\max(0, r^{-(T-t)}K - S_t) \leq P_t^e$ für $0 \leq t \leq T$ und Aktien ohne Dividendenzahlung.