## 8. Übungsblatt zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Abgabe: Montag, 04.06.2012, 9.50 Uhr, in Seminarraum 2

**Aufgabe 8.1** (3 Punkte) [Ersteintrittszeiten des Wiener-Prozesses]
Seien $\{W_t\}_{t\geq 0}$ ein eindimensionaler Wiener-Prozess mit stetigen Pfaden und

$$\tau_a = \inf\{t \geq 0 : W_t \geq a\}$$

für $a > 0$. Zeigen Sie über die Dichte der Stoppzeit $\tau_a$, dass $E(\tau_a) = \infty$ gilt.
**Hinweis:** Verwenden Sie dazu die Folgerungen aus Satz 9.3.

**Aufgabe 8.2** (4 Punkte) [Erstaustrittszeiten des Wiener-Prozesses]
Seien $\{W_t^{(d)}\}_{t\geq 0}$ ein $d$-dimensionaler Wiener-Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit stetigen Pfaden und

$$\tau_r = \inf\{t \geq 0 : |W_t^{(d)}| = r\}$$

für $r > 0$. Zeigen, Sie dass gilt

$$E\tau_r = r^2/d, \quad \text{insbesondere} \quad P(\tau_r < \infty) = 1.$$

**Hinweise:**

a) Zeigen Sie zunächst, dass $\lim_{n\to\infty} P(\tau_r > n) = 0$ und $P(\tau_r < \infty) = 1$ gilt.

b) Betrachten Sie

$$E|W_t^{(d)}|^2 = E|W_t^{(d)}|^2 I\{\tau_r \leq n\} + E|W_t^{(d)}|^2 I\{\tau_r > n\} = I_{n1} + I_{n2}$$

und zeigen Sie mithilfe von Satz 9.3, dass gilt

$$I_{n1} = E[r^2 + d(n - \tau_r)]I\{\tau_r \leq n\}.$$

**Aufgabe 8.3** (1,5 + 3 + 1,5 + 1,5 + 1,5 Punkte) [Pfade des Wiener-Prozesses]
Seien $\{W_t\}_{t\geq 0}$ ein eindimensionaler Wiener-Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit stetigen Pfaden und

$$Z_\omega = \{t \in [0, \infty) : W_t(\omega) = 0\}$$

für $\omega \in \Omega$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen $P$-f.s. erfüllt sind:

a) $Z_\omega$ besitzt Lebesgue-Maß 0;

b) 0 ist Häufungspunkt von $Z_\omega$;

c) $Z_\omega$ ist abgeschlossen und unbeschränkt;

d) $Z_\omega$ liegt in keinem Intervall $I \subset [0, \infty)$ dicht;

e) der Wiener-Prozess nimmt jeden Punkt $a \in \mathbb{R}$ unendlich oft an.

**Hinweise:**

a) Benutzen Sie den Satz von Fubini.

b) Betrachten Sie

$$\tau_+ = \inf\{t \geq 0 : W_t \in (0, \infty)\} \qquad \text{und} \qquad \tau_- = \inf\{t \geq 0 : W_t \in (-\infty, 0)\}$$

und benutzen Sie dazu die Nichtdifferenzierbarkeit der Pfade sowie das Blumenthal'sche 0-1-Gesetz, d.h., sei $\{W_t\}_{t\geq 0}$ ein eindimensionaler Wiener-Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit stetigen Pfaden und kanonischer Filtration $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$, so gilt für alle $A \in \bigcap_{t>0} \mathcal{A}_t$: $P(A) \in \{0, 1\}$.

c) Benutzen Sie Teil b) um die Unbeschränktheit zu zeigen.

d) Benutzen Sie, dass die Pfade von unbeschränkter Variation sind.

e) Benutzen Sie das Gesetz vom iterierten Logarithmus und Teil c).

**Aufgabe 8.4** (mündlich) [No-Arbitrage-Prinzip]
Gehen Sie von einem Markt aus, in dem das No-Arbitrage-Prinzip gilt und in dem Aktienleerverkäufe möglich sind (d.h. Aktien können geliehen und dann verkauft werden). Zeigen Sie: Haben zwei Portfolios morgen, unabhängig von der Marktentwicklung, den gleichen Wert, so besitzen sie auch heute den gleichen Wert.

**Aufgabe 8.5** (1+2+1+4 Punkte) [europäische und amerikanische Call-/Put-Optionen]
Die oberen Indizes $a$ bzw. $e$ kennzeichnen amerikanische bzw. europäische Optionen. Es gelte das No-Arbitrage-Prinzip und $r$ sei die risikolose Zinsrate. Zeigen bzw. begründen Sie:

a) $C_t^a \geq C_t^e$ und $P_t^a \geq P_t^e$ für $0 \leq t \leq T$;

b) $\max(0, S_t - K) \leq C_t^a \leq S_t$ und $\max(0, K - S_t) \leq P_t^a \leq K$ für $0 \leq t \leq T$;

c) $C_t^e \leq S_t$ und $P_t^e \leq r^{-(T-t)}K$ für $0 \leq t \leq T$;

d) $\max(0, S_t - r^{-(T-t)}K) \leq C_t^e$ und $\max(0, r^{-(T-t)}K - S_t) \leq P_t^e$ für $0 \leq t \leq T$ und Aktien ohne Dividendenzahlung.