Stochastische Prozesse

Josef G. Steinebach
Köln, SS 2012

Einleitung

In der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik bisher meistens:

Modelle für Folgen $X_1, X_2, \ldots$ unabhängiger (identisch verteilter) ZV.

Ausnahme: Martingalfolgen

Für Anwendungen werden benötigt:

1) Modelle für die kontinuierliche Beobachtung von Zufallsphänomenen (z.B. die Bewegung von Partikeln, Aktienverläufe, Anfragen bei Bedienungssystemen, medizinische Messkurven u.v.m.)

2) Modellierung anderer Abhängigkeitsstrukturen (Zähldaten, Markov-Prozesse, Martingale in stetiger Zeit, stationäre Prozesse usw.)

Definition. *Ein stochastischer Prozess ist eine Familie* $\{X_t\}_{t\in T}$ *von Zufallsvariablen* $X_t : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{B})$ *auf einem W-Raum* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Bezeichnungen: T – *Parameter- oder Zeitmenge*,
$\mathcal{X}$ – *Zustandsraum*.

Die Funktionen $t \mapsto X_t(\omega)$, $\omega \in \Omega$ *fest, heißen Pfade des Prozesses (und modellieren i.A. das zeitlich dynamische Verhalten eines stochastischen Systems).*

Andere Schreibweisen: $\{X(t)\}_{t\in T}$, $\{X(t) : t \in T\}$.

Eigentlich: $(t, \omega) \mapsto X(t, \omega) = X_t(\omega)$.

Beispiele

– Anzahl der bis zur Zeit t eingetretenen Versicherungsfälle,

– Wert einer Aktie zur Zeit t,

– Position eines Teilchens zur Zeit t,

– Wartezeit eines Kunden, der zur Zeit t eintrifft,

– Länge einer Warteschlange zur Zeit t

u.v.m.

Aufgaben:

– Konstruktion stochastischer Prozesse mit bestimmten Verteilungs- und Pfadeigenschaften,

– Bestimmung wichtiger Kenngrößen,

– Asymptotik für $t \to \infty$,

[– statistische Analyse des Modells: Zeitreihen].

Hier: Ausgewählte Kapitel aus der Theorie stochastischer Prozesse, insbesondere in stetiger Zeit, z.B.

– allgemeine Martingale,

– Prozesse mit unabhängigen, stationären Zuwächsen (z.B. Brown'sche Bewegung, Poisson-Prozess etc.),

– Markov-Prozesse,

– stochastische Integrale und Differentialgleichungen,

– Anwendungen in der Finanzmathematik.

Die Angabe eines stochastischen Prozesses erfolgt oft durch die Angabe von

T,	dem Parameterraum,
$(\mathcal{X}, \mathcal{B})$,	dem Zustandsraum,
$P_{X_{t_1},\ldots,X_{t_n}}$,	den gemeinsamen Verteilungen aller je endlich vielen ZV. $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$.

Bemerkung. Dies reicht nicht zur eindeutigen Festlegung von $\{X_t\}_{t\in T}$ aus!

Beispiel. Seien $T = [0,1]$, $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = ([0,1], [0,1] \cap \mathcal{B}^1)$ und $U: (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{B})$ mit $P(U = u) = 0 \quad \forall\, u$. Setze

$$X_t \equiv 0, \quad t \in [0,1];$$

$$Y_t = \begin{cases} 1, & \text{falls } U = t, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann sind $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$ und $\{Y_t\}_{t\in[0,1]}$ stochastische Prozesse mit denselben „endlich-dimensionalen Verteilungen“, denn

$$P\big((X_{t_1},\dots,X_{t_n}) \neq (Y_{t_1},\dots,Y_{t_n})\big) \;=\; P\Big(\bigcup_{i=1}^{n}\{X_{t_i}\neq Y_{t_i}\}\Big) \;\leq\; \sum_{i=1}^{n} P(U=t_i) = 0\,,$$

aber z.B.

$$P\Big(\sup_{0\le t\le 1} X_t \le \tfrac{1}{2}\Big) \;=\; 1\,, \quad \text{jedoch}$$
$$P\Big(\sup_{0\le t\le 1} X_t \le \tfrac{1}{2}\Big) \;=\; 0\,, \quad \text{also}$$

Vorsicht bei „Ereignissen“, die durch überabzählbar viele Bedingungen festgelegt sind. Daher macht man i.A.

„Regularitätsvoraussetzungen“, z.B. Stetigkeit (Rechts-, Linksstetigkeit) der Pfade o.ä.

Mathematische Grundlagen:

- Allgemeiner Maß- und Integralbegriff,
- Grenzwertbegriffe der W-Theorie,
- bedingte Erwartungswerte und bedingte Verteilungen,
- Martingalkonvergenzsätze.

Grundlegend für die Konstruktion stochastischer Prozesse ist die Beantwortung folgender Frage:

Für $T\ (\neq\emptyset)$ sei $\{\mu_{t_1,\dots,t_n} : t_i\in T,$ paarweise verschieden $(p.v.)\}$ ein System endlich-dimensionaler Verteilungen, d.h. die $\mu_{t_1,\dots,t_n}$ sind W-Maße auf $(\mathcal{X}^n,\mathcal{B}^n)$.

Existiert dann ein W-Raum $(\Omega,\mathcal{A},P)$ mit einem stochastischen Prozess $\{X_t\}_{t\in T}$, $X_t : \Omega\to\mathcal{X}$, derart, dass

$$\mu_{t_1,\dots,t_n} \;=\; P_{X_{t_1},\dots,X_{t_n}} \quad \forall\, t_1,\dots,t_n\in T\,,\ \ p.v.\,?$$

Notwendige „Konsistenz“-Bedingungen:

(K1) $\mu_{t_1,\dots,t_n;t_{n+1}}(B\times\mathcal{X}) \;=\; \mu_{t_1,\dots,t_n}(B) \quad \forall\, B\in\mathcal{B}^n$;

(K2) Für jede Permutation π von $(1,\dots,n)$ gilt:

$$\mu_{t_1,\dots,t_n}(B) \;=\; \mu_{t_{\pi(1)},\dots,t_{\pi(n)}}(B_\pi) \quad \forall\, B\in\mathcal{B}^n\,, \quad \text{wobei}$$

$$B_\pi \;=\; \big\{(x_{\pi(1)},\dots,x_{\pi(n)}) : (x_1,\dots,x_n)\in B\big\}\,.$$