I Konstruktion stochastischer Prozesse

1 Der Existenzsatz von Kolmogorov

Gegeben: $\mathcal{X}$ – polnischer Raum
$\mathcal{B}$ – σ-Algebra der Borel'schen Teilmengen
T – nicht-leere Parametermenge
$\mu_{t_1,\ldots,t_n}$ – konsistente Familie, endlich-dimensionaler Verteilungen, d.h. (K1), (K2) gelten (auch „projektive Familie" genannt)

Satz 1.1. (*Kolmogorov*) *Es existieren ein W-Raum* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *und ein stochastischer Prozess* $\{X_t\}_{t\in T}$, $X_t : \Omega \to \mathcal{X}$, *derart, dass*

$$\mu_{t_1,\ldots,t_n} = P_{X_{t_1},\ldots,X_{t_n}} \quad \forall\ t_1,\ldots,t_n \in T, \quad p.v.$$

Bezeichnungen: a) P heißt „projektiver Limes" der endlich-dimensionalen Verteilungen $\mu_{t_1,\ldots,t_n}$, $t_i \in T$, $p.v.$

b) $\{X_t\}_{t\in T}$ heisst „kanonischer Prozess" zu den endlich-dimensionalen Verteilungen $\mu_{t_1,\ldots,t_n}$, $t_i \in T$, $p.v.$

Beispiel 1.1. (Produktmaße)

a) $T = \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ polnischer Raum und (μ_n) Folge von W-Maßen auf $\mathcal{B}$. Setzt man

$$\mu_{i_1,\ldots,i_k} := \mu_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mu_{i_k}, \quad i_\nu \in \mathbb{N}, \quad p.v.,$$

so bilden die $\mu_{i_1,\ldots,i_k}$ eine konsistente Familie endlich-dimensionaler Verteilungen, denn

(1) $$\mu_{i_1,\ldots,i_k;i_{k+1}}(B \times \mathcal{X}) = \Big(\bigotimes_{\nu=1}^{k} \mu_{i_\nu}\Big)(B) \cdot \underbrace{\mu_{i_{k+1}}(\mathcal{X})}_{1} = \mu_{i_1,,\ldots,i_k}(B)\,;$$

(2) $$\mu_{i_1,\ldots,i_k}\big(B_{i_1} \times \cdots \times B_{i_k}\big) = \prod_{\nu=1}^{k} \mu_{i_\nu}\left(B_{i_\nu}\right) \overset{\pi \text{ Perm.}}{=} \prod_{\nu=1}^{k} \mu_{\pi(i_\nu)}\big(B_{\pi(i_\nu)}\big) = \mu_{\pi(i_1),\ldots,\pi(i_k)}\big(B_{\pi(i_1)} \times \cdots \times B_{\pi(i_k)}\big).$$

Dies liefert die Existenz einer Folge unabhängiger ZV. auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Verteilungen $P_{X_n} = \mu_n$, $n \in \mathbb{N}$.

b) T überabzählbar, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, $\mu_{t_1,\ldots,t_n}$ wie in a).

Liefert analog die Existenz einer <u>Familie</u> unabhängiger ZV. auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Verteilungen $P_{X_t} = \mu_t$, $t \in T$.

Bemerkung 1.1. Die obige Konstruktion ist bei einem beliebigen Messraum $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ möglich.

Beispiel 1.2. (Poisson-Prozess) $T = [0, \infty)$, $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1)$.

Für $\lambda > 0$ (fest) bezeichne $\pi_{\lambda t}$ die Poisson-Verteilung mit Parameter λt $(t \geq 0)$, $\pi_0 = \varepsilon_0$. Für $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_k$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_0$, wähle

$$\mu_{t_1,\ldots,t_k}\big(\{(n_1, \ldots, n_k)\}\big) \;=\; \prod_{\nu=1}^{k} \pi_{\lambda(t_\nu - t_{\nu-1})}(n_\nu - n_{\nu-1}) \quad (t_0 = 0 = n_0).$$

Für beliebige $t_\nu \geq 0$ (*p.v.*) sei i Permutation mit $0 \leq t_{i_1} < \ldots < t_{i_k}$. Setzt man

$$\mu_{t_1,\ldots,t_n}(B) \;:=\; \mu_{t_{i_1},\ldots,t_{i_k}}(B_i),$$

so bilden die $\mu_{t_1,\ldots,t_n}$ eine <u>konsistente Familie</u>.

Dies liefert einen stochastischen Prozess $\{N_t\}_{t \geq 0}$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$:

(1) $N_0 \equiv 0$ P-f.s.;

(2) $\{N_t\}_{t \geq 0}$ besitzt <u>unabhängige Zuwächse</u>, d.h. für $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_k$ gilt: Die ZV. $N_{t_1} - N_{t_0}, \ldots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}}$ sind unabhängig;

(3) $\{N_t\}_{t \geq 0}$ besitzt <u>stationäre Zuwächse</u>, d.h. die Verteilung von $N_t - N_s$ $(0 \leq s < t)$ hängt nur von $t - s$ ab.

Beispiel 1.3. (Wiener-Prozess) $T = [0, \infty)$, $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1)$.

Für $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$ wähle man

$$\mu_{t_1,\ldots,t_n} \;=\; Q_{D_1, D_1 + D_2, \ldots, D_1 + \cdots + D_n}$$

mit (auf einem geeigneten W-Raum) (Q-) unabhängigen, $N(0, t_\nu - t_{\nu-1})$-verteilten ZV. D_ν, $\nu = 1, \ldots, n$ $(t_0 := 0,\ N(0,0) := \varepsilon_0)$, und für beliebige $t_\nu \geq 0$ (*p.v.*), π Permutation mit $0 \leq t_{\pi(1)} < \ldots < t_{\pi(n)}$:

$$\mu_{t_1,\ldots,t_n}(B) \;=\; \mu_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(n)}}(B_\pi).$$

Dann bilden die $\mu_{t_1,\ldots,t_n}$ eine konsistente Familie endlich-dimensionaler Verteilungen und der zugehörige stochastische Prozess $\{X_t\}_{t \geq 0}$ besitzt <u>unabhängige, stationäre</u> Zuwächse. Insbesondere gilt, dass

$$P_{X_t} \;=\; N(0, t) \quad \forall\, t \geq 0.$$

Beispiel 1.4. (Markov-Ketten) $T = \mathbb{N}_0$, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ diskret, z.B. o.B.d.A. $= \big(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})\big)$. Seien $\big(p_i(0)\big)_{i \in \mathbb{N}}$ ein W-Maß und $\mathbb{P} = \big(\!\big(p_{ij}\big)\!\big)_{i,j \in \mathbb{N}}$ eine „stochastische Matrix“, d.h. $p_{ij} \geq 0 \;\; \forall\, i, j \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1 \;\; \forall\, i \in \mathbb{N}$.

Für $0 \leq n_1 < \ldots < n_k =: n$; $i_0, \ldots, i_k \in \mathbb{N}$, wähle man zunächst

$$\mu_{0,1,\ldots,n}(\{(i_0, \ldots, i_n)\}) \;=\; p_{i_0}(0)\, p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}\,,$$

dann

$$\mu_{n_1,\ldots,n_k} \;\; \text{als Randverteilung von} \;\; \mu_{0,1,\ldots,n_k}\,,$$

und für Permutationen der Indizes $n_1, \ldots, n_k$ analog zu den Beispielen 1.2/1.3.

Dann bilden die $\mu_{n_1,\ldots,n_k}$ eine konsistente Familie. Beachte z.B., dass

$$\begin{aligned} \mu_{n_1,\ldots,n_k;n_{k+1}}(B_k \times \mathbb{N}) \;&=\; \sum_{(i_1,\ldots,i_k) \in B_k} \; \sum_{i_{k+1} \in \mathbb{N}} \mu_{n_1,\ldots,n_k;n_{k+1}}\big(\{(i_1, \ldots, i_{k+1})\}\big) \\ &\overset{\mathbb{P}\text{ stoch.}}{=} \sum_{(i_1,\ldots,i_k) \in B_k} \cdot\, 1 \;=\; \mu_{n_1,\ldots,n_k}(B_k)\,. \end{aligned}$$

Der zugehörige stochastische Prozess $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ auf einem geeigneten W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ bildet eine „homogene Markov-Kette“ mit Anfangsverteilung

$$P(X_0 = i_0) \;=\; p_{i_0}(0)\,, \quad i_0 \in \mathbb{N}_0\,,$$

und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(X_{n+1} = i_1 \,|\, X_n = i_0) \;=\; p_{i_0 i_1}\,, \quad i_0, i_1 \in \mathbb{N},\; n \in \mathbb{N}_0\,.$$

$\{X_n\}$ besitzt die (elementare) Markov-Eigenschaft, d.h.

$$\begin{aligned} &P\left(X_{n_{k+1}} = i_{k+1} \,|\, X_{n_k} = i_k, \ldots, X_{n_0} = i_0\right) \\ &=\; P\left(X_{n_{k+1}} = i_{k+1} \,|\, X_{n_k} = i_k\right)\,, \quad i_\nu \in \mathbb{N}_0\,,\; 0 \leq n_0 < \ldots < n_{k+1}\,. \end{aligned}$$

Beachte z.B.

$$\begin{aligned} &P\left(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0\right) \\ &=\; \frac{P\left(X_0 = i_0, \ldots, X_{n+1} = i_{n+1}\right)}{P(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n)} \\ &=\; \frac{p_{i_0}(0)\, p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_n i_{n+1}}}{p_{i_0}(0)\, p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}} \;=\; p_{i_n i_{n+1}}\,, \end{aligned}$$

sowie

$$
\begin{aligned}
P\left(X_{n+1}=i_{n+1} \,|\, X_n=i_n\right) &= \frac{P\left(X_{n+1}=i_{n+1}, X_n=i_n\right)}{P(X_n=i_n)} \\
&\overset{\text{Konstr.}}{=} \frac{\left(\sum\limits_{i_0} \cdots \sum\limits_{i_{n-1}} p_{i_0}(0)\, p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}\right) p_{i_n i_{n+1}}}{\sum\limits_{i_0} \cdots \sum\limits_{i_{n-1}} p_{i_0}(0)\, p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}} \\
&= p_{i_n i_{n+1}} \,.
\end{aligned}
$$

Die (so genannten) n-schrittigen Übergangswahrscheinlichkeiten

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{(n)} &= P(X_n = j \,|\, X_0 = i) \\
\Big[&= P(X_{m+n} = j \,|\, X_m = i) \Big] \quad (\text{Homogenität})
\end{aligned}
$$

berechnen sich für $n \geq 2$ zu

$$
p_{ij}^{(n)} = \sum_{k_1,\ldots,k_{n-1}} p_{ik_1}\, p_{k_1 k_2} \cdots p_{k_{n-1},j}
$$

bzw. in Matrix-Schreibweise:

$$
\left(\!\left(p_{ij}^{(n)}\right)\!\right) =: \mathbb{P}^{(n)} = \mathbb{P}^n \,.
$$

Es gelten die Chapman-Kolmogorov-Gleichungen:

$$
p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)} \,.
$$

Die Theorie der Markov-Ketten ist sehr reichhaltig und hat bereits vielfältige Anwendungen; vgl. z.B. Chung (1967), Fahrmeir-Kaufmann-Ost (1981), Ferschl (1970) u.v.a.

Für weiterführende Entwicklungen reicht dieser Begriff aber i.A. nicht aus. Wir werden deshalb i.F. allgemeine Markov-Prozesse untersuchen, die auf allgemeinen (regulären) bedingten (Übergangs-) Wahrscheinlichkeiten basieren.