III Stochastische Analysis und Finanzmathematik

Ziel dieses Kapitels ist es, eine Einführung in die stochastischen Grundlagen von Finanzmärkten zu geben. Es werden zunächst Modelle in diskreter Zeit behandelt, anschließend in stetiger Zeit. Letztere gehen bereits auf Bachelier (1900) zurück, der ein Modell der so genannten „geometrischen Brown'schen Bewegung" zur quantitativen Analyse von Aktienverläufen vorschlug. Die moderne Entwicklung der Finanzmathematik wurde eingeleitet von Black[1] und Scholes (1973) und Merton (1973), die hierfür 1997 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften verliehen bekamen, und ist ein hochaktuelles Anwendungsgebiet der „stochastischen Analysis". Als Literatur empfehlen wir z.B.

Irle, A. (1998) *Finanzmathematik.* Teubner, Stuttgart.

Lamberton, D., Lapeyre, B. (1996) *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance.* Chapman-Hall, London.

Es gibt verschiedene Typen von Finanzmärkten, z.B.

- Aktienmärkte (Handel mit Aktien);
- Rentenmärkte (Handel mit festverzinslichen Wertpapien);
- Währungsmärkte (Handel mit Währungen);
- Warenmärkte (Handel mit Waren).

Zu den oben genannten Basisgütern hat sich seit 1973 ein schwunghafter Handel mit so genannten „derivativen Finanzgütern" entwickelt; das sind in die Zukunft reichende Kontrakte über einen (potentiellen) Handel mit einem Basisgut. Wir konzentrieren unsere Betrachtungen auf

Optionen: Sie geben dem Käufer das Recht (aber nicht die Pflicht), ein bestimmtes Finanzgut zu einem zukünftigen Zeitpunkt T zu einem vereinbarten Preis K zu kaufen oder zu verkaufen.

Bei Kaufrecht: Call-Option;
Bei Verkaufsrecht: Put-Option.

Europäische Option: Ausübung nur zu festem Zeitpunkt T;
Amerikanische Option: Ausübung bis zum festem Zeitpunkt T.

Der Käufer der Option befindet sich in einer "long position";
Der Verkäufer der Option befindet sich in einer "short position".

[1] 1995 verstorben

Verkäufer verlangt Preis (Prämie). Welcher Preis ist angemessen?

Beispiel: Europäische Call-Option (z.B. auf Aktie),
T: Ausübungszeitpunkt, K: Ausübungspreis;

Sei S_t der Preis der Aktie z.Zt. t.

Wert der Option zum Zeitpunkt T: $\left\{ \begin{array}{cc} S_T - K\,, & S_T > K \\ 0\,, & S_T \leq K \end{array} \right\}$, also $= [S_T - K]^+$.

Verkäufer muss Wert $[S_T - K]^+$ z.Zt. T zur Verfügung stellen. Zwei Fragen:

1.) Welcher Preis (Wert z.Zt. $t = 0$) ist angemessen für eine Option, die z.Zt. T den Wert $[S_T - K]^+$ hat?

2.) Wie stellt der Verkäufer, der z.Zt. $t = 0$ die Prämie erhält, sicher, dass er z.Zt. T den Wert $[S_T - K]^+$ zur Verfügung stellen kann? ("Hedging")

No-Arbitrage-Prinzip: Es kann kein risikoloser Profit ("Arbitrage") gemacht werden.

Anwendung auf obiges Beispiel:

Annahme: Es kann Geld zu fester Zinsrate r geliehen oder investiert werden, d.h. für 1 EUR erhält man nach 1 Jahr e^r EUR $=$ $(1+p)$ EUR, also $r = \ln(1+p)$, p : Zinssatz.

Seien C_t bzw. P_t der Preis einer Call- bzw. Put-Option (auf dasselbe Finanzgut) z.Zt. t.

Call- bzw. Put-Parität: Für alle $t < T$ muss gelten:

$$C_t - P_t \;=\; S_t - K\, \underbrace{e^{-r(T-t)}}$$

↖ abgezinster Ausübungspreis z.Zt. t

$\big[$Beachte: $C_T - P_T \;=\; [S_T - K]^+ - [K - S_T]^+ \;=\; S_T - K\,.\big]$

Andernfalls (ohne Transaktionskosten):

Sei z.B. $C_t - P_t \;>\; S_t - Ke^{-r(T-t)}$, so kaufe man z.Zt. t 1 Aktie + 1 Put-Option und verkaufe 1 Call-Option: Wert $C_t - P_t - S_t$.

Falls $C_t - P_t - S_t \;>\; 0$: Betrag risikolos anlegen bis T zu Rate r;

Falls $C_t - P_t - S_t \;\leq\; 0$: Betrag leihen bis T zu Rate r.

Zur Zeit T gibt es dann zwei Möglichkeiten:

1) $S_T > K$: Call wird ausgeübt (Aktie muss zum Preis K abgegeben werden), Put nicht ausüben, Cash-Konto ausgleichen;

Wert z.Zt. T: $\;K + 0 + e^{r(T-t)}(C_t - P_t - S_t) \;>\; 0\,!$

2) $S_T \leq K$: Call wird nicht ausgeübt, aber Put ausüben, Cash-Konto ausgleichen;

Wert z.Zt. T : $0 + K + e^{r(T-t)}(C_t - P_t - S_t) > 0$!

Also in beiden Fällen positiv, Widerspruch zur Arbitrage-Freiheit!

Bei $C_t - P_t < S_t - \kappa e^{-r(T-t)}$ analog:

Verkaufe 1 Aktie + 1 Put-Option, kaufe 1 Call-Option;

Wert z.Zt. T : $S_t\, e^{r(T-t)} - S_T + (P_t - C_t)e^{r(T-t)} + (S_T - K)$ (da $C_T - P_T = S_T - K$).

Für $t = 0$ erhält man aus der Call-Put-Parität:

$$\begin{aligned} C_0 - P_0 &= S_0 - K\, e^{-rT}, \qquad \text{folglich, da} \quad C_0 \geq 0\,,\ P_0 \geq 0\,, \\ C_0 &\geq \max\{0, S_0 - K\, e^{-rT}\} \qquad \longleftarrow \text{„europäische Wertuntergrenze"}. \end{aligned}$$

Die Call-Put-Parität liefert keine Preisformel (für C_0 bzw. P_0). Hierfür benötigt man stochastische Modelle für den Aktienverkauf $\{S_t\}_{0 \leq t \leq T}$ in Verbindung mit möglichen Handelsstrategien ("perfect hedging", "complete markets"). Dabei wird z.B. der Wert einer Option als stochastisches Integral ausgedrückt, welches aus einer bestimmten Handelsstrategie resultiert.

Wir beginnen mit einer Formalisierung von Finanzmodellen in diskreter Zeit.

10 Finanzmodelle in diskreter Zeit

Zunächst einige Begriffe:

Assets (Werte, Aktiva):

Der Markt bestehe aus $d + 1$ Finanzgütern (Assets) mit Werten $S_{0,n}, S_{1,n}, \ldots, S_{d,n}$ (≥ 0) zur Zeit n. Formal seien die $S_{i,n}$ ZV. auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, die messbar sind bezüglich $\mathcal{A}_n$, $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0,1,\ldots,N}$ Filterung, die die Information zu den jeweiligen Zeiten $0, 1, \ldots, N$ modelliert.

Annahmen: $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{A}_N = \mathcal{A}$, $P(\{\omega\}) > 0 \quad \forall\, \omega \in \Omega$.

Setze $S_n := (S_{0,n}, \ldots, S_{d,n})^T$ und nehme $S_{0,n}$ als risikolos an, d.h. bei konstantem Zins r liefert $S_{0,0} = 1$ z.Zt. n einen Ertrag $S_{0,n} = (1 + r)^n$.

Der Koeffizient $\beta_n = \frac{1}{(1+r)^n}$ heißt Diskontierungsfaktor.

Allgemeiner Diskontierungsfaktor: $\beta_n = \frac{1}{S_{0,n}}$ (Betrag, den man z.Zt. 0 risikolos anlegen muss, um z.Zt. n den Betrag 1 zu erhalten.)

Portfolio: Gesamtheit der Finanzgüter

Handelsstrategie: ZV. $\vartheta_n = (\vartheta_{0,n}, \ldots, \vartheta_{d,n})^T$, wobei ϑ_n $\mathcal{A}_{n-1}$-messbar (vorhersagbar) ist und die $\vartheta_{i,n}$ die Anteile bezeichnen, die z.Zt. n vom Asset i gehalten werden (dabei sei ϑ_0 ebenfalls $\mathcal{A}_0$-messbar).

Interpretation: Die Anteile zur Zeit n werden aufgrund der Information bis zum Zeitpunkt $n-1$ festgelegt.

Wert des Portfolios z.Zt. n:

$$V_n \;=\; \sum_{i=0}^{d} \vartheta_{i,n}\, S_{i,n} \;=\; \vartheta_n^T\, S_n \qquad \text{bzw.}$$

$$\widetilde{V}_n \;=\; \beta_n\, V_n \;=\; \vartheta_n^T\, (\beta_n\, S_n) \;=:\; \vartheta_n^T\, \widetilde{S}_n \qquad \text{(diskontiert)}.$$

Die Handelsstrategie heißt selbstfinanzierend, falls

$$\vartheta_n^T\, S_n \;=\; \vartheta_{n+1}^T\, S_n \qquad \forall\; n = 0, 1, \ldots, N-1\,.$$

Interpretation: Sobald z.Zt. n die neuen Werte der Assets $S_{0,n}, \ldots, S_{d,n}$ bekannt sind, passt der Investor seine Handelsstrategie an, ohne Werte zu- oder abfließen zu lassen.

Satz 10.1. *Folgende Aussagen sind äquivalent*:

(a) $\{\vartheta_n\}_{n=0,\ldots,N}$ *ist selbstfinanzierend*;

(b) *Für alle* $n \in \{1, \ldots, N\}$ *gilt*:

$$V_n \;=\; V_0 + \sum_{j=1}^{n} \vartheta_j^T\, \Delta S_j\,, \quad \textit{wobei} \quad \Delta S_j \;=\; S_j - S_{j-1}\,;$$

(c) *Für alle* $n \in \{1, \ldots, N\}$ *gilt*:

$$\widetilde{V}_n \;=\; V_0 + \sum_{j=1}^{n} \vartheta_j^T\, \Delta\widetilde{S}_j\,, \quad \textit{wobei} \quad \Delta\widetilde{S}_j \;=\; \beta_j\, S_j - \beta_{j-1}\, S_{j-1}\,.$$

Bemerkung 10.1. Für jeden vorhersagbaren Prozess $\left\{(\vartheta_{1,n}, \ldots, \vartheta_{d,n})^T\right\}_{n=0,\ldots,N}$ und jeden $\mathcal{A}_0$-messbaren Wert V_0 existiert ein eindeutig bestimmter vorhersagbarer Prozess $\left\{\vartheta_{0,n}\right\}_{n=0,1,\ldots,N}$, so dass die Strategie $\left\{\vartheta_n = (\vartheta_{0,n}, \ldots, \vartheta_{d,n})^T\right\}_{n=0,1,\ldots,N}$ selbstfinanzierend ist mit Anfangswert V_0.

Bemerkung 10.2. Bisher wurden keine Annahmen gemacht über das Vorzeichen der Anteile $\vartheta_{i,n}$. Interpretation: Bei

$\vartheta_{0,n} < 0$: Anteil $|\vartheta_{0,n}|$ risikolos leihen;

$\vartheta_{i,n} < 0$ $(i = 1, \ldots, d)$: Anteil $|\vartheta_{i,n}|$ von Asset i geschuldet (z.B. bei Fälligkeit einer Call-Option).

Definition 10.1.

a) *Die Strategie* $\vartheta = \{\vartheta_n\}_{n=0,\ldots,N}$ *heißt* *zulässig*

$$:\Longleftrightarrow \quad \vartheta \ \text{ist selbstfinanzierend und } V_n \geq 0 \quad \forall\, n = 0, \ldots, N\,.$$

Interpretation: Der Anleger ist jederzeit in der Lage, seine Schulden zurückzuzahlen.

b) *Eine Arbitrage-Strategie ist eine zulässige Strategie mit* $V_0 = 0$ *und*

$P(\widetilde{V}_N > 0) > 0$ (*risikoloser Profit*)

$\left[\ \Longleftrightarrow \quad P(V_N = \beta_N^{-1} \widetilde{V}_N > 0) \ > \ 0\,, \quad V_n \ \geq \ 0 \quad \forall\, n\,.\right]$

Es lässt sich eine Beziehung herstellen zwischen Arbitrage-Freiheit in einem diskreten Finanzmodell und Martingalen. Zunächst zur Vorbereitung:

Lemma 10.1. *Sei* $\{\vartheta_n\}_{n=0,1,\ldots,N}$ *vorhersagbar und selbstfinanzierend. Falls es keine Arbitrage-Möglichkeit gibt, so muss für*

$$\widetilde{G}_n \ := \ \widetilde{G}_n(\vartheta) \ := \ \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \left(\vartheta_{1,j}\, \Delta\widetilde{S}_{1,j} + \cdots + \vartheta_{d,j}\, \Delta\widetilde{S}_{d,j}\right)}_{\text{„ diskontierter Gewinn “}} \quad (n = 0, \ldots, N)$$

gelten:

$$P(\widetilde{G}_N \leq 0) \ > \ 0\,.$$

Beispiel 10.1. (Cox-Ross-Rubinstein-Modell)

$d = 1:$ $\quad S_{1,n} =: S_n \ (n = 0, 1, \ldots, N)$;

$\qquad S_{0,n} = (1+r)^n \ (n = 0, 1, \ldots, N)$, $\quad r > 0$ fest.

Modell für S_n : Mit $0 < 1 + a < 1 + b$ gelte $S_0 > 0$,

$$S_{n+1} \ = \ \begin{cases} (1+a)\, S_n\,, & \text{mit Wahrscheinlichkeit} \quad p_n > 0\,, \\ (1+b)\, S_n\,, & \text{mit Wahrscheinlichkeit} \quad q_n = 1 - p_n > 0\,. \end{cases}$$

W-Modell: $\Omega = \big\{(\omega_1, \dots \omega_N) \,|\, \omega_i \in \{1+a, 1+b\}\big\}$

$\big[\omega_n$ möglicher Wert von S_n/S_{n-1} $(n = 1, \dots, N)\big]$;

$\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}(S_1, \dots, S_n)$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$;

$S_0 > 0$ konstant, $S_1(\omega) := S_0 \cdot \omega_1, \dots, S_N(\omega) := S_{N-1}(\omega) \cdot \omega_N$.

Mit $T_n = S_n/S_{n-1}$ $(n = 1, \dots, N)$ gilt:

$$P\big(\{(\omega_1, \dots, \omega_N)\}\big) \;=\; P(T_1 = \omega_1, \dots, T_N = \omega_N) \overset{!}{>} 0 \quad \forall\, \omega .$$

Ferner: $\mathcal{A}_n \;=\; \mathcal{A}(T_1, \dots, T_n) \;=\; \mathcal{A}(S_1, \dots, S_n)$,

da $S_n \;=\; S_0 \frac{S_1}{S_0} \cdots \frac{S_n}{S_{n-1}} \;=\; S_0\, T_1 \cdots T_n$ bzw. $T_n \;=\; \frac{S_n}{S_{n-1}}$,

also $\mathcal{A}(S_1, \dots, S_n) \subset \mathcal{A}(T_1, \dots, T_n)$ und umgekehrt.

(1) Zeige: Der diskontierte Prozess $\{\widetilde{S}_n\}_{n=0,\dots,N}$, $\widetilde{S}_n \;=\; (1+r)^{-n} S_n$,
ist ein Martingal bezüglich $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0,\dots,N}$ unter P

$\iff$ $E(T_{n+1} \,|\, \mathcal{A}_n) \;=\; (1+r) \quad \forall\, n = 0, 1, \dots, N-1$
(wie bei der risikofreien Anlage).

Wir charakterisieren jetzt die Arbitrage-Freiheit über eine Martingal-Eigenschaft:

Satz 10.2. *Der obige Finanzmarkt ist genau dann arbitragefrei, wenn es ein zu P äqivalentes W-Maß P^* gibt (mit denselben Nullmengen wie P), unter dem der diskontierte Asset-Prozess $\{\widetilde{S}_n\}_{n=0,\dots,N}$ (komponentenweise) ein P^*-Martingal ist bezüglich $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0,\dots,N}$.*

Beispiel 10.1 (Cox-Ross-Rubinstein) (Fortsetzung)

$$S_{0,n} \;=\; (1+r)^n, \quad S_{1,n} \;=\; S_n \;=\; \begin{cases} (1+a)\, S_{n-1}, \\ (1+b)\, S_{n-1}. \end{cases}$$

(2) Modell ist arbitragefrei $\Longrightarrow$ $a < r < b$.

(3) Arbitrage-Strategie bei

(i) $r \le a$: Leihe S_0 z.Zt. 0 und investiere in Asset 1. Zahle z.Zt. N $S_0\,(1{+}r)^N$ zurück und verkaufe Asset 1. Dann erhält man:

$$S_N \;=\; \prod_{n=0}^{N-1} \frac{S_{n+1}}{S_n}\, S_0 \;\ge\; (1+a)^N S_0 \;\ge\; (1+r)^N\, S_0 \quad \underline{\text{und}}$$

$$P\big(S_N > (1+a)^N\, S_0\big) \;\ge\; P(S_1 = (1+b)\, S_0) \;>\; 0,$$

also besteht eine Arbitrage-Möglichkeit.

(ii) $r \geq b$: Verkaufe Asset 1 z.Zt. 0 und lege das Geld risikolos an.
Profit: $(1+r)^N S_0 - S_N$.

(4) Zeige jetzt: Modell arbitragefrei $\iff$ $\exists$ äquivalentes W-Maß P^* :

$$T_1, \dots, T_N \ \text{i.i.d.}, \ P^*(T_1 = 1+a) \ = \ \frac{b-r}{b-a} \ =: \ p \ := \ 1 - P^*(T_1 = 1+b) \, .$$

"Claim" und "Hedge":

Ein "Claim" ist eine (zufallsabhängige) Forderung, die ihrem Besitzer z.Zt. N eine Auszahlung, etwa $h = h_N$, ermöglicht, z.B.

Call-Option: $h \ = \ [S_N - K]^+$;

Put-Option: $h \ = \ [K - S_N]^+$.

Hier: $h \ = \ h(S_N)$, aber auch $h \ = \ h(S_0, \dots, S_N)$ möglich.

Der "Claim" heisst „absicherbar" ("attainable"), falls es eine zulässige Strategie gibt mit

$$h \ = \ V_N(\vartheta) \, .$$

Ein derartiges ϑ heißt "Hedge".

Definition 10.2. *Der obige Finanzmarkt heißt „vollständig", falls jeder "Claim" absicherbar ist.*

Satz 10.3. *Ein arbitragefreier Markt ist genau dann vollständig, wenn es genau ein zu P äquivalentes W-Maß P^* gibt, unter dem der diskontierte Preisprozess $\{\widetilde{S}_n\}_{n=0,\dots,N}$ komponentenweise ein P^*-Martingal ist bezüglich $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0,\dots,N}$.*

Bemerkung 10.3. P^* wird dazu benutzt werden, um Preisformeln und Hedge-Strategien zu entwickeln.

Mit P^* aus Satz 10.3 erhält man nun die Möglichkeit, "Claims" in vollständigen Finanzmärkten zu bewerten (Preise) und zu "hedgen":

Sei h ein ($\mathcal{A}_N$-messbarer) "Claim" und $\{\vartheta_n\}_{n=0,\dots,N}$ ein "Hedge", der den "Claim" absichert, d.h.

$$h \ = \ V_N(\vartheta)$$

Dann folgt: $\{\widetilde{V}_n(\vartheta)\}_{n=0,\dots,N}$ ist P^*-Martingal, insbesondere

$$V_0(\vartheta) \;=\; E^*\big(\widetilde{V}_N(\vartheta)\big) \;=\; E^*\Big(\frac{h}{S_{0,N}}\Big) \quad \underline{\text{und}}$$

$$V_n(\vartheta) \;=\; S_{0,n}\; E^*\Big(\frac{h}{S_{0,N}}\,\Big|\,\mathcal{A}_n\Big) \quad \forall\, n = 0,1,\dots,N \quad \big(\text{da } \{\widetilde{V}_n\} \text{ Martingal}\big).$$

D.h., zu jeder Zeit $n \in \{0,1,\dots,N\}$ ist der Wert $V_n(\vartheta)$ einer zulässigen Strategie $\{\vartheta_n\}_{n=0,1,\dots,N}$, die h absichert, durch h vollständig bestimmt.

Man nennt $V_n(\vartheta)$ den „Preis“ des “Claims” z.Zt. n, d.h. den Betrag, den man z.Zt. n benötigt, um mit (ϑ_n) den Wert

$$h \;=\; V_N(\vartheta) \quad \text{zur Zeit } N \text{ zu erzielen.}$$

Ein Investor, der den “Claim” zur Zeit 0 zum Preis

$$E^*\Big(\frac{h}{S_{0,N}}\Big)$$

verkauft, kann über die Strategie (ϑ_n) mit $h = V_N(\vartheta)$ den “Claim” „perfekt hedgen“.

Bemerkung 10.4. Das zugunde liegende W-Maß P muss für die Preisfestsetzung nicht bekannt sein. Benötigt wird das äquivalente Martingalmaß P^* (und die Filtration $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0,\dots,N}$).

Beispiel 10.1 (Cox-Ross-Rubinstein) (Fortsetzung)

(5) Es gilt die Call-Put-Parität:

$$C_n - P_n \;=\; S_n - K\,(1+r)^{-(N-n)},$$

wobei C_n bzw. P_n den Preis (z.Zt. n) einer (europäischen) Call- bzw. Put-Option mit Ausübungspreis K bezeichnet.

(6) (Asymptotischer) Preis für Call- bzw. Put-Option (zu einer festen Zeit T):

Im Cox-Ross-Rubinstein sei $r = \dfrac{RT}{N}$ $(R, T$ fest, $N \to \infty)$ und $0 < 1+a < 1+r < 1+b$ so, dass $\log\Big(\dfrac{1+a}{1+r}\Big) = -\dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}$, $\log\Big(\dfrac{1+b}{1+r}\Big) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}$ $(\sigma^2 > 0$ fest$)$.

Beachte:

(i) $\beta_N \;=\; (1+r)^N \;=\; \Big(1+\dfrac{RT}{N}\Big)^N \;\underset{(N\to\infty)}{\longrightarrow}\; e^{RT}\,,$

d.h. R kann als Zinsrate interpretiert werden;

(ii) $E^* \log\Big(\dfrac{T_i}{1+r}\Big) \;=\; (1-2p)\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}\,,$ wobei

$$p \;=\; \frac{b-r}{b-a}\,, \quad 1-p \;=\; \frac{r-a}{b-a}\,, \quad 1-2p \;=\; \frac{2r-a-b}{b-a}\,,$$

$$1+a \;=\; (1+r)\,e^{-\sigma/\sqrt{N}}\,, \quad 1+b \;=\; (1+r)\,e^{\sigma/\sqrt{N}}\,,$$

$$1-2p \;=\; \frac{2(1+r)-(1+a+1+b)}{(1+b)-(1+a)} \;=\; \frac{2-e^{-\sigma/\sqrt{N}}-e^{\sigma/\sqrt{N}}}{e^{\sigma/\sqrt{N}}-e^{-\sigma/\sqrt{N}}}\,,$$

$$(1-2p)\,\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \;\sim\; \frac{2\big(-\frac{\sigma^2}{2N}\big)}{2\,\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}\,\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \;\sim\; -\frac{\sigma^2}{2N} \quad (N\to\infty)\,,$$

$$Var^* \log\Big(\frac{T_i}{1+r}\Big) \;=\; E^* \log^2\Big(\frac{T_i}{1+r}\Big) - \Big\{E^* \log\Big(\frac{T_i}{1+r}\Big)\Big\}^2\,,$$

$$\;=\; \frac{\sigma^2}{N} - \Big\{(1-2p)\,\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\Big\}^2 \;\underset{(N\to\infty)}{\sim}\; \frac{\sigma^2}{N}\,,$$

d.h.
$$E^* \log\Big(\frac{S_N}{(1+r)^N}\Big) \;=\; \log S_0 + E^*\Big(\sum_{i=1}^N \log\Big\{\frac{T_i}{1+r}\Big\}\Big)\,,$$

$$\;=\; \log S_0 - \frac{\sigma^2}{2}\,\big(1+o(1)\big)\,,$$

$$Var^*\Big(\log\Big\{\frac{S_N}{(1+r)^N}\Big\}\Big) \;=\; Var^*\big(\log S_N\big) \;\sim\; \sigma^2 \quad (N\to\infty)\,.$$

Put-Option:

$$P_0^{(N)} \;=\; \Big(1+\frac{RT}{N}\Big)^{-N} E^*\Big[K - S_0 \prod_{i=1}^N T_i\Big]^+$$

$$\;=\; E^*\Big[K\Big(1+\frac{RT}{N}\Big)^{-N} - S_0\,e^{Z_n}\Big]^+\,,$$

wobei $Z_n \;:=\; \sum_{i=1}^N X_i^{(N)} \;:=\; \sum_{i=1}^N \log\Big(\dfrac{T_i}{1+r}\Big)\,.$

Zeige: $Z_N \;\underset{(N\to\infty)}{\overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow}}\; Z\,,$ wobei $P_Z^* \;=\; N\big(-\frac{\sigma^2}{2},\,\sigma^2\big)\,.$

Setze $f(z) := \left[K\,e^{-RT} - S_0 e^{z}\right]^+$, stetig, beschränkt (in z).

Da $\left|P_0^{(N)} - E^* f(Z_N)\right| \;\le\; K\left|\left(1+\frac{RT}{N}\right)^{-N} - e^{-RT}\right| \;\longrightarrow\; 0$

und $E^* f(Z_N) \underset{(N\to\infty)}{\longrightarrow} E^* f(Z)$, erhält man:

$$\lim_{N\to\infty} P_0^{(N)} \;=\; E^*\left[K\,e^{-RT} - S_0\,e^{-\frac{\sigma^2}{2}+\sigma Z^*}\right]^+ ,$$

wobei $P^*_{Z^*} \;=\; N(0,1)$.

Wegen

$$\left[K\,e^{-RT} - S_0\,e^{-\frac{\sigma^2}{2}+\sigma Z^*}\right]^+ \;=\; \begin{cases} K\,e^{-RT} - S_0\,e^{-\frac{\sigma^2}{2}+\sigma Z^*}, & Z^* \le z_0\,, \\ 0 & , \; Z^* > z_0\,, \end{cases}$$

wobei $z_0 \;=\; -\left\{\log(S_0/K) + RT - (\sigma^2/2)\right\}/\sigma$, ergibt sich schließlich mit $\Phi(z) \;=\; P^*(Z^* \le z)$ und

$$z_1 \;=\; \left\{\log(S_0/K) + RT + (\sigma^2/2)\right\}/\sigma\,, \quad z_2 \;=\; z_1 - \sigma \quad (= -z_0)\,,$$

die Preisformel:

$$\lim_{N\to\infty} P_0^{(N)} \;=\; K\,e^{-RT}\,\Phi(-z_2) - S_0\,\Phi(-z_1)\,,$$

$$\lim_{N\to\infty} C_0^{(N)} \;=\; S_0\,\Phi(z_1) - K\,e^{-RT}\,\Phi(z_2) \quad (\text{über die Call-Put-Parität}).$$

Bemerkung 10.5. Der Preis hängt entscheidend von der (asymptotischen) „Volatilität“ σ des Log-Preisprozesses ab. Die Black-Scholes-Formel erhält man für $\sigma^2 \;=\; T\,\sigma_0^2$.

(7) Hedging: Gesucht ist eine zulässige Strategie $\vartheta = \{\vartheta_n\}_{n=0,1,\ldots,N}$: $C_N = V_N(\vartheta)$.

(i) Zunächst: $C_n = c(n, S_n)$, wobei die Funktion c nur von K, a, b, r abhängt.

(ii) Eine „duplizierende“ Strategie $\{\vartheta_n\}$ mit $C_n = V_n(\vartheta)$ ist von der Form $\vartheta_n = \Delta(n, S_{n-1})$, ϑ_n = Anteil des risikobehafteten Assets z.Zt. n, wobei

$$\Delta(n,x) \;=\; \frac{c\big(n, x(1+b)\big) - c\big(n, x(1+a)\big)}{x(b-a)}\,.$$

Zusammen: Europäische Call-Optionen lassen sich im Cox-Ross-Rubinstein-Modell perfekt “hedgen”. Der (asymptotische) Preis ist über die Black-Scholes-Formel festgelegt, in die ausschließlich die „Volatilität“ als unbekannter Parameter eingeht.