11 Stochastisches Integral und Itô-Formel

Im diskreten Finanzmodell bei selbstfinanzierender Strategie $\vartheta = \{\vartheta_n\}_{n=0,\ldots,N}$ mit Anfangswert V_0 gilt:

$$\widetilde{V}_n(\vartheta) \;=\; V_0 + \sum_{j=1}^{n} \vartheta_j^T \,\Delta\widetilde{S}_j\,.$$

Dieser diskontierte Wertprozess des Assetprozesses $\{S_n\}_{n=0,\ldots,N}$ ist eine Martingaltransformation von $\{\widetilde{S}_n\}_{n=0,\ldots,N}$, wobei letzterer Prozess ein Martingal ist unter dem äquivalentem W-Maß P^*.

Im stetigen Modell gibt es kein „direktes“ Analogon, etwa

$$\widetilde{V}_t(\vartheta) \;=\; V_0 + \int_0^t \vartheta_s^T \, d\widetilde{S}_s\,,$$

da die Prozesse $\{\widetilde{S}_t\}_{0\le t\le T}$ oft von unbeschränkter Variation sind, z.B. Funktionen eines d-dimensionalen Wiener-Prozesses.

Konstruktion eines stochastischen Integrals (Itô-Integral) (bezüglich des Standard-Wiener-Prozesses):

Gegeben: $\{W_t\}_{t\ge0}$ (1-dimensionaler Standard-) Wiener-Prozess bezüglich $\{\mathcal{A}_t\}_{t\ge0}$ mit stetigen Pfaden auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Definition 11.1. $\{H_t\}_{0\le t\le T}$ *heißt Elementarprozess* $\big($*auf* $(\Omega,\mathcal{A},P)\big)$

$$:\Longleftrightarrow \quad H_t(\omega) \;=\; \sum_{i=1}^{k} \vartheta_i(\omega)\, I_{(t_{i-1},t_i]}(t)\,, \quad \text{wobei} \quad 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T\,,\; k \in \mathbb{N}\,,$$

ϑ_i *beschränkt*, $\mathcal{A}_{t_{i-1}}$*-messbar* $\forall\, i = 1,\ldots,k$.

Stochastisches Integral (von $\{H_t\}$ bezüglich $\{W_t\}$):

Sei $t \in (t_\ell, t_{\ell+1}]$ $(\ell = 0,1,\ldots,k-1)$:

$$\mathcal{I}(H)_t \;:=\; \sum_{i=1}^{\ell} \vartheta_i \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right) \;+\; \vartheta_{\ell+1}(W_t - W_{t_\ell})\,.$$

Äquivalente Darstellung:

$$\mathcal{I}(H)_t \;:=\; \sum_{i=1}^{k} \vartheta_i \left(W_{t_i\wedge t} - W_{t_{i-1}\wedge t}\right)\,,$$

insbesondere $t \longmapsto \mathcal{I}(H)_t$ stetig. Schreibweise:

$$\mathcal{I}(H)_t \;=:\; \int_0^t H_s\, dW_s\,.$$

Eigenschaften: Sei $\{H_t\}_{0\le t\le T}$ Elementarprozess (bezüglich $\{\mathcal{A}_t\}_{0\le t\le T}$):

(11.1) $\Big\{\int_0^t H_s\,dW_s\Big\}_{0\le t\le T}$ wohldefiniert, stetiges Martingal bezüglich $\{\mathcal{A}_t\}_{0\le t\le T}$;

(11.2) $E\Big(\int_0^t H_s\,dW_s\Big)^2 \;=\; E\Big(\int_0^t H_s^2\,ds\Big)$;

(11.3) $E\Big(\sup\limits_{0\le t\le T}\Big|\int_0^t H_s\,dW_s\Big|^2\Big) \;\le\; 4\,E\Big(\int_0^T H_s^2\,ds\Big)$.

Bemerkung 11.1. Wir definieren noch für $0\le t\le T$:

(11.4) $\int_t^T H_s\,dW_s \;:=\; \int_0^T H_s\,dW_s - \int_0^t H_s\,dW_s$.

Falls $A\in\mathcal{A}_t$, so definiert auch $I_A(\omega)\,I_{(t,T]}(s)\,H_s(\omega)$ einen Elementarprozess. Man verifiziert leicht:

(11.5) $\int_0^T I_A(\omega)\,H_s(\omega)\,I_{(t,T]}(s)\,dW_s(\omega) \;=\; I_A(\omega)\Big(\int_t^T H_s\,dW_s\Big)(\omega)$.

Fortsetzung des stochastischen Integrals auf die Klasse

$$\mathcal{H} \;=\; \Big\{\{H_t\}_{0\le t\le T}\;\Big|\;\{H_t\}_{0\le t\le T}\text{ ist progressiv messbar, } E\Big(\int_0^T H_t^2\,dt\Big)<\infty\Big\}.$$

Satz 11.1. *Sei* $\{W_t\}_{0\le t\le T}$ *Wiener-Prozess auf* $(\Omega,\mathcal{A},P)$ (*bezüglich* $\{\mathcal{A}_t\}_{0\le t\le T}$) *mit stetigen Pfaden und*

$$\mathcal{M}^c \;=\; \mathcal{M}^c_{[0,T]} \;=\; \Big\{\{M_t\}_{0\le t\le T}\;\Big|\;\{M_t\}\text{ ist stetiges Martingal bezüglich }\{\mathcal{A}_t\}\Big\}.$$

Dann gilt:

a) $\exists$ *eine lineare Abbildung* $I:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{M}^c$:

(a1) *Falls* $\{H_t\}$ *Elementarprozess ist* (*P-f.s.*), *so folgt:* $I(H)_t \;=\; \int_0^t H_s\,dW_s$;

(a2) $E\big(I^2(H)_t\big) \;=\; E\Big(\int_0^t H_s^2\,ds\Big) \quad \forall\, 0\le t\le T$.

I ist (P-f.s.) eindeutig im folgenden Sinn: Falls I und $\widetilde{I}$ die Eigenschaften (a1), (a2) *besitzen, so folgt für P-fast alle ω:* $I(H)_t(\omega)=\widetilde{I}(H)_t(\omega)\;\;\forall\,0\le t\le T$.

Wir setzen: $\int_0^t H_s\,dW_s \;:=\; I(H)_t$.

b) *Für* $\{H_t\}_{0\le t\le T} \in \mathcal{H}$ *und* $\tau:\ \Omega \to [0,T]$ *Stoppzeit bezüglich* $\{\mathcal{A}_t\}_{0\le t\le T}$:

(b1) $E\Big(\sup\limits_{0\le t\le T}\Big|\int_0^t H_s\,dW_s\Big|^2\Big) \ \le\ 4\,E\Big(\int_0^T H_s^2\,ds\Big)$;

(b2) $\int_0^\tau H_s\,dW_s \ =\ \int_0^T I_{[0,\tau]}(s)\,H_s\,dW_s \quad P\text{-}f.s.$

Wir benötigen noch eine Erweiterung von $I(H)_t$ auf die größere Klasse

$$\widetilde{\mathcal{H}} \ =\ \Big\{\{H_s\}_{0\le s\le T}\,\Big|\,\{H_t\}_{0\le t\le T} \text{ ist progressiv messbar}\,,\ \int_0^T H_s^2\,ds < \infty \ \ P\text{-f.s.}\Big\} \ \supset\ \mathcal{H}\,.$$

Es gilt der folgende Satz:

Satz 11.2. *Sei* $\{W_t\}_{0\le t\le T}$ *Wiener-Prozess auf* $(\Omega,\mathcal{A},P)$ (*bezüglich* $\{\mathcal{A}_t\}_{0\le t\le T}$) *mit stetigen Pfaden und* $\mathcal{X}^c \ =\ \{\{X_t\}_{0\le t\le T}\,|\,(X_t)$ *ist stochastischer Prozess mit stetigen Pfaden*$\}$

$\Longrightarrow\quad \exists$ *eine* *<u>eindeutige lineare</u>* *Abbildung* $\widetilde{I}:\ \widetilde{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathcal{X}^c$ *derart, dass gilt*:

(i) *Falls* $\{H_t\}$ *Elementarprozess ist, so folgt* P*-f.s.*:

$$\widetilde{I}(H)_t \ =\ \int_0^t H_s\,dW_s \quad \forall\ 0\le t\le T\,;$$

(ii) *Falls* $\{H^{(n)}\}\subset\widetilde{\mathcal{H}}$ *mit* $\int_0^T \big(H_s^{(n)}\big)^2\,ds \ \xrightarrow{P}\ 0 \quad (n\to\infty)$, *so folgt*:

$$\sup_{0\le t\le T}\big|\,\widetilde{I}(H_t^{(n)})\,\big| \ \xrightarrow{P}\ 0 \quad (n\to\infty)\,.$$

<u>Schreibweise</u>: $\int_0^t H_s\,dW_s \ :=\ \widetilde{I}(H)_t\,,\quad 0\le t\le T\,.$

Bemerkung 11.2. $\Big\{\int_0^t H_s\,dW_s\Big\}_{0\le t\le T}$ ist im Allgemeinen <u>kein</u> Martingal!

Zusammenfassung: Sei $\{W_t\}_{0\le t\le T}$ Wiener-Prozess bezüglich $\{\mathcal{A}_t\}_{0\le t\le T}$ mit stetigen Pfaden.

1) Für progressiv messbare Prozesse $\{H_t\}_{0\le t\le T}$ mit $\int_0^T H_s^2\,ds < +\infty$ P-f.s. liefert Satz 11.2 ein stochastisches Integral (P-f.s.) : $\int_0^t H_s\,dW_s$ (stetig in t);

2) Gilt sogar $E\Big(\int_0^T H_s^2\,ds\Big) < +\infty$, so bildet $\Big\{\int_0^t H_s\,dW_s\Big\}_{0\le t\le T}$ ein stetiges Martingal (bezüglich $\{\mathcal{A}_t\}_{0\le t\le T}$).

Bezeichnung: Itô-Integral.

3) Es lässt sich zeigen: $E\Big(\int_0^T H_s^2\,ds\Big) < +\infty$

$$\iff \qquad E\Big(\sup_{0\le t\le T}\Big(\int_0^t H_s\,dW_s\Big)^2\Big) < +\infty .$$

Itô-Kalkül: Basierend auf dem obigen stochastischen Integral wird jetzt ein Differentialkalkül eingeführt, der es gestattet, Funktionen $t \longmapsto f(W_t)$, $f \in C^2$, „in geeigneter Weise" zu differenzieren.

Die „üblichen" Formeln wie

$$f^2(t) \;=\; 2\int_0^t f(s)\,f'(s)\,ds \;=\; 2\int_0^t f(s)\,df(s) \quad (\text{falls } f(0)=0) \qquad \text{bzw.}$$

$$d\big(f^2(t)\big) \;=\; 2\,f(t)\,df(t)$$

sind dabei nicht zu erwarten. Würde nämlich gelten, dass

$$W_t^2 \;=\; 2\int_0^t W_s\,dW_s ,$$

so wäre $\{W_t^2\}_{0\le t\le T}$ wegen $E\Big(\int_0^T W_s^2\,ds\Big) = \frac{T^2}{2} < \infty$ ein nicht-negatives Martingal mit $W_0^2 \equiv 0$, folglich $W_t^2 = 0$ P-f.s. (Widerspruch).

Es wird sich zeigen:

$$W_t^2 \;=\; 2\int_0^t W_s\,dW_s \;+\; t \qquad \text{„Itô-Formel" für } f(W_t) \;=\; W_t^2 .$$

In „differentieller" Form:

$$d\big(W_t^2\big) \;=\; 2\,W_t\,dW_t \;+\; dt\,, \quad W_0^2 \;=\; 0 .$$

Allgemein:

$$df(W_t) \;=\; f'(W_t)\,dW_t \;+\; \frac{1}{2}\,f''(W_t)\,dt$$

mit der Bedeutung:

$$f(W_t) \;=\; f(W_0) \;+\; \int_0^t f'(W_s)\,dW_s \;+\; \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)\,ds\,.$$

Die Itô-Formel gilt für eine allgemeinere Klasse von stochastischen Prozessen und wird nützlich sein bei der konkreten Berechnung stochastischer Integrale.

Definition 11.2. *Sei $\{W_t\}_{0\le t\le T}$ ein Wiener-Prozess bezüglich $\{\mathcal{A}_t\}_{0\le t\le T}$ mit stetigen Pfaden. Ein Prozess $\{X_t\}_{0\le t\le T}$ heißt Itô-Prozess (in $\mathbb{R}$), wenn er die Darstellung besitzt (P-f.s.):*

$$(11.6)\qquad X_t \;=\; X_0 \;+\; \int_0^t K_s\,ds \;+\; \int_0^t H_s\,dW_s\,,\qquad 0\le t\le T\,,$$

wobei
- *X_0 $\mathcal{A}_0$-messbar ist,*
- *$\{K_s\}_{0\le t\le T}$, $\{H_s\}_{0\le t\le T}$ progressiv messbar sind,*
- *$\int_0^T |\,K_s\,|\,ds \;<\; \infty$ P-f.s.,*
- *$\int_0^T |\,H_s\,|^2\,ds \;<\; \infty$ P-f.s..*

Bemerkung 11.3.

1) Die Darstellung eines Itô-Prozesses ist im folgenden Sinne eindeutig: Falls

$$\begin{aligned} X_t \;&=\; X_0 \;+\; \int_0^t K_s\,ds \;+\; \int_0^t H_s\,dW_s \\ &=\; \widetilde{X}_0 \;+\; \int_0^t \widetilde{K}_s\,ds \;+\; \int_0^t \widetilde{H}_s\,dW_s\,,\qquad 0\le t\le T\,, \end{aligned}$$

so gilt:

$$X_0 \;=\; \widetilde{X}_0 \quad P\text{-f.s.}\,,\;\; K_s \;=\; \widetilde{K}_s \quad \lambda\otimes P\text{-f.ü.}\,,\;\; H_s \;=\; \widetilde{H}_s \quad \lambda\otimes P\text{-f.ü.}$$

2) Ist der Itô-Prozess ein Martingal bezüglich $\{\mathcal{A}_t\}_{0\le t\le T}$, so folgt:

$$K_0 \;=\; 0 \quad \lambda\otimes P\text{-f.ü.}$$

Satz 11.3. *Sei* $\{X_t\}_{0\le t\le T}$ *ein Itô-Prozess der Form*

$$X_t \;=\; X_0 \;+\; \int_0^t K_s\,ds \;+\; \int_0^t H_s\,dW_s$$

und $f:\; x \longmapsto f(x)$ *zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt:*

$$f(X_t) \;=\; f(X_0) \;+\; \int_0^t f'(X_s)\,dX_s \;+\; \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\,d\langle X,X\rangle_s\,, \tag{11.7}$$

wobei $\langle X,X\rangle_t \;:=\; \int_0^t H_s^2\,ds$ (*quadratische Variation*)

und $\int_0^t f'(X_s)\,dX_s \;:=\; \int_0^t f'(X_s)\,K_s\,ds \;+\; \int_0^t f'(X_s)\,H_s\,dW_s\,.$

In differentieller Form:

$$dX_t \;=\; K_t\,dt \;+\; H_t\,dW_t\,, \tag{11.8}$$

$$\begin{aligned} d\big(f(X_t)\big) \;&=\; f'(X_t)\,dX_t \;+\; \frac{1}{2}\,f''(X_t)\,d\langle X,X\rangle_t \\ &=\; f'(X_t)\,K_t\,d_t \;+\; f'(X_t)\,H_t\,dW_t \;+\; \frac{1}{2}\,f''(X_t)\,d\langle X,X\rangle_t\,. \end{aligned} \tag{11.9}$$

Beispiel 11.1. $X_t = W_t$, also $dX_t = 0\cdot ds + 1\cdot dW_t$; $f(x) = x^2$, $\int_0^t 1^2\,ds = t$.
Dann gilt:

$$d(W_t^2) \;=\; 2\,W_t\,dW_t \;+\; \frac{1}{2}\,2\,dt \qquad \text{bzw.}$$

$$W_t^2 \;=\; 2\int_0^t W_s\,dW_s \;+\; t\,.$$

Allgemeiner gilt:

Satz 11.4. *Sei* $dX_t = K_s\,ds + H_s\,dW_s$ *wie in Satz* 11.3 *und* $f:\;(t,x)\longmapsto f(t,x)$ *zweimal stetig partiell differenzierbar bezüglich* x *mit Ableitungen* $f_x(t,x)$, $f_{xx}(t,x)$ *und einmal stetig partiell differenzierbar bezüglich* t *mit Ableitung* $f_t(t,x)$ $\Longrightarrow$

$$df(t,X_t) \;=\; f_t(t,X_t)\,dt \;+\; f_x(t,X_t)\,dX_t \;+\; \frac{1}{2}\,f_{xx}(t,X_t)\,d\langle X,X\rangle_t\,, \tag{11.10}$$

d.h.

$$f(t,X_t) \;=\; f(0,X_0) \;+\; \int_0^t f_s(s,X_s)\,ds \;+\; \int_0^t f_x(s,X_s)\,dX_s \;+\; \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}(s,X_s)\,d\langle X,X\rangle_s\,.$$

Beispiel 11.2. (Lösung einer stochastischen Differentialgleichung)
Suche einen adaptierten (progressiv messbaren) Prozess $\{S_t\}_{t\geq 0}$, so dass P-f.s. gilt:

(11.11) $$dS_t \;=\; S_t\big(\mu\,dt \;+\; \sigma\,dW_t\big)\,, \quad S_0 \;=\; x_0\,, \quad \text{d.h.}$$

(11.11') $$S_t \;=\; x_0 \;+\; \int_0^t \mu\,S_s\,ds \;+\; \int_0^t \sigma\,S_s\,dW_s\,, \quad t\geq 0\,.$$

Ansatz: Fasse formal dS_t/S_t als $d(\log S_t)$ auf, $S_t>0$, und benutze die Itô-Formel für $f(x)=\log x$. Dies ergibt:

$$\log S_t \;=\; \log S_0 \;+\; \int_0^t \frac{1}{S_s}\,dS_s \;+\; \frac{1}{2}\int_0^t \Big(-\frac{1}{S_s^2}\Big)\,\sigma^2\,S_s^2\,ds\,,$$

wegen (11.11') somit

$$\begin{aligned}\log S_t \;&=\; \log S_0 \;+\; \int_0^t \Big(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\Big)\,ds \;+\; \int_0^t \sigma\,dW_s\\ &=\; \log S_0 \;+\; \Big(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\Big)\,t \;+\; \sigma\,W_t\,.\end{aligned}$$

Daher macht man den folgenden Ansatz

$$S_t \;=\; x_0\,\exp\Big\{\Big(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\Big)\,t \;+\; \sigma\,W_t\Big\} \qquad (\text{geometrische Brown'sche Bewegung})$$

und verifiziert (11.11) mit Hilfe der Itô-Formel für $f(t,x)=x_0\,\exp\big\{\big(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\big)\,t+\sigma\,x\big\}$:

Beachtet man $f_t(t,x) \;=\; \big(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\big)\,f(t,x)$, $f_x(t,x) \;=\; \sigma\,f(t,x)$, $f_{xx}(t,x) \;=\; \sigma^2\,f(t,x)$, $d\langle W,W\rangle_t \;=\; dt$, so liefert die Itô-Formel (Satz 11.4):

$$S_t \;=\; f(t,W_t) \;=\; x_0 \;+\; \int_0^t S_s\Big(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\Big)\,ds \;+\; \int_0^t S_s\,\sigma\,dW_s \;+\; \frac{1}{2}\int_0^t S_s\,\sigma^2\,ds\,,$$

also die Behauptung.

Um die Eindeutigkeit der Lösung

$$S_t \;=\; x_0\,\exp\Big\{\Big(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\Big)\,t \;+\; \sigma\,W_t\Big\}$$

von (11.11) bzw. (11.11') nachweisen zu können, benötigen wir noch die folgende „Formel von der partiellen Integration“ stochastischer Integrale:

Satz 11.5. *Seien* $\{X_t\}_{0\leq t\leq T}$ *und* $\{Y_t\}_{0\leq t\leq T}$ *Itô-Prozesse mit*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s\,ds + \int_0^t H_s\,dW_s \qquad \textit{und}$$
$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \widetilde{K}_s\,ds + \int_0^t \widetilde{H}_s\,dW_s\,.$$

Dann folgt:

$$X_t\,Y_t = X_0\,Y_0 + \int_0^t X_s\,dY_s + \int_0^t Y_s\,dX_s + \langle X,Y\rangle_t\,,$$

wobei $\langle X,Y\rangle_t = \int_0^t H_s\,\widetilde{H}_s\,ds$ (*Kreuz-Variation*) .

In differentieller Form:

$$d(X_t\,Y_t) = X_t\,dY_t + Y_t\,dX_t + d\langle X,Y\rangle_t\,.$$

Beispiel 11.2. (Fortsetzung) $dS_t = S_t\,(\mu\,dt + \sigma\,dW_t)\,,\quad S_0 = x_0\,.$

Zeige: $S_t = x_0\,\exp\{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\,t + \sigma\,W_t\}$ ist eindeutige Lösung.

Fazit: Für jeden Wiener-Prozess $\{W_t\}_{t\geq 0}$, $\mu,\sigma\in\mathbb{R}$, $T>0$, existiert ein eindeutiger Itô-Prozess $\{S_t\}_{0\leq t\leq T}$ mit

$$dS_t = S_t\,(\mu\,dt + \sigma\,dW_t)\,,\quad S_0 = x_0\,,\qquad \text{nämlich}$$
$$S_t = x_0\,\exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\,W_t\right\},\qquad 0\leq t\leq T\,.$$

Bemerkung 11.4.

a) Der obige Prozess $\{S_t\}_{0\leq t\leq T}$ modelliert im (kontinuierlichen) Black-Scholes-Modell die Entwicklung des risikobehafteten Assets (z.B. eines Aktienpreises).

b) Für $\mu = 0$ ist $\{S_t\}_{0\leq t\leq T}$ ein Martingal, das exponentielle Martingal der Brown'schen Bewegung.

Bemerkung 11.5. Falls $\{X_t\}_{0\leq t\leq T}$ ein Itô-Prozess ist mit Werten in V, $V\subset\mathbb{R}^1$, offen (z.B. $V=(0,\infty)$), so gilt die Itô-Formel auch in der folgenden verallgemeinerten Form: Sei $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, so folgt:

$$df(X_t) = f'(X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}\,f''(X_t)\,d\langle X,X\rangle_t\,.$$

Mit diesen Vorüberlegungen sind wir nun in der Lage, ein kontinuierliches Analogon des Cox-Ross-Rubinstein-Modells zu untersuchen.