12 Das Black–Scholes–Modell

Black & Scholes (1973): Bewertung einer europäischen Option auf (z.B.) 1 Aktie

Asset-Prozess:
$$dS_{0,t} = r\, S_{0,t}\, dt \qquad \text{(risikolos, Zinsrate } r\text{)};$$
$$dS_{1,t} =: dS_t = S_t\,(\mu\, dt + \sigma\, dW_t) \qquad \text{(risikobehaftet)}.$$

Setzt man $S_{0,0} = 1$, so gilt: $S_{0,t} = e^{rt}$, $t \geq 0$.

Bezeichnet S_0 den Aktienpreis z.Zt. 0, so erhält man:

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right\}, \qquad 0 \leq t \leq T,$$

↖ Ausübungszeitpunkt

d.h., $\left\{\log\left(S_t/S_0\right)\right\}_{0 \leq t \leq T}$ ist ein Wiener-Prozess (mit Drift).

Daraus resultieren die folgenden Eigenschaften des Modells:

- S_t ist log-normalverteilt;
- Pfade des Prozesses sind stetig;
- $\dfrac{S_t}{S_s}$ bzw. $\dfrac{S_t - S_s}{S_s}$, $0 \leq s \leq t$, sind unabhängig von $\mathcal{A}_s$ (unabhängige relative Zuwächse);
- $\dfrac{S_t - S_s}{S_s} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \dfrac{S_{t-s} - S_0}{S_0}$, $0 \leq s \leq t$ (stationäre relative Zuwächse).

Strategie: $\vartheta = \{\vartheta_t\}_{0 \leq t \leq T} = \{(H_{0,t}, H_t)\}_{0 \leq t \leq T}$ ist ein an $\{\mathcal{A}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ adaptierter (bzw. progressiv messbarer) Prozess, der die Anteile $H_{0,t}$ bzw. H_t des risikolosen bzw. risikobehafteten Assets z.Zt. t modelliert.

Wert des Portfolios: $V_t = V_t(\vartheta) = H_{0,t}\, S_{0,t} + H_t\, S_t$.

Analog zum diskreten Modell definieren wir selbstfinanzierende Strategien:

diskret: $\Delta V_n(\vartheta) = V_{n+1}(\vartheta) - V_n(\vartheta) \stackrel{!}{=} \vartheta_{n+1}^T (S_{n+1} - S_n)$;

kontinuierlich: $dV_t(\vartheta) \stackrel{!}{=} H_{0,t}\, dS_{0,t} + H_t\, dS_t$;

Voraussetzung: $\displaystyle\int_0^T |H_{0,t}|\, dt < \infty$ P-f.s., $\displaystyle\int_0^T H_t^2\, dt < \infty$ P-f.s.;

Dann gilt:
$$\int_0^T H_{0,t}\, dS_{0,t} = \int_0^T H_{0,t}\, r\, e^{rt}\, dt \qquad \text{und}$$
$$\int_0^T H_t\, dS_t = \int_0^T (H_t\, S_t\, \mu)\, dt + \int_0^T (H_t\, S_t\, \sigma)\, dW_t$$

sind wohldefiniert, da $t \longmapsto S_t$ stetig ist auf $[0,T]$, also auch beschränkt.

Definition 12.1. *Eine Strategie* $\vartheta = \{\vartheta_t\}_{0\leq t\leq T} = \{(H_{0,t}, H_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *heißt* *selbstfinanzierend*, *falls*

(1) $\displaystyle\int_0^T |H_{0,t}|\,dt + \int_0^T H_t^2\,dt < \infty$ *P-f.s.*;

(2) $\displaystyle H_{0,t}\,S_{0,t} + H_t\,S_t = H_{0,0}\,S_{0,0} + H_0\,S_0 + \int_0^t H_{0,s}\,dS_{0,s} + \int_0^t H_s\,dS_s$ *P-f.s.*

Bezeichnet $\widetilde{S}_t = e^{-rt}\,S_t$, $0 \leq t \leq T$, wieder den diskontierten Asset-Prozess der risikobehafteten Anlage, so gilt folgendes Analogon zu Satz 10.1:

Satz 12.1. *Sei* $\vartheta = \{(H_{0,t}, H_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *adaptiert (progressiv messbar) und gelte (1) aus Definition* 12.1. *Setzt man* $\widetilde{V}_t(\vartheta) := e^{-rt}\,V_t(\vartheta)$, *so gilt*:
ϑ *ist selbstfinanzierend* $\iff$ $\displaystyle\widetilde{V}_t(\vartheta) = V_0(\vartheta) + \int_0^t H_s\,d\widetilde{S}_s$ *P-f.s.* $\forall\, 0 \leq t \leq T$.

Äquivalentes Martingalmaß:

Sei $\{W_t\}_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess (mit stetigen Pfaden) und $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$ die kanonische Filtration (mit den üblichen Bedingungen).

Es gilt der folgende Satz:

Satz 12.2. *(Girsanov) Sei* $\{\delta_t\}_{0\leq t\leq T}$ *adaptiert (progressiv messbar) mit* $\int_0^T \delta_t^2 < \infty$ *P-f.s und definiere* $\{L_t\}_{0\leq t\leq T}$ *gemäß*

$$L_t = \exp\Big\{ -\int_0^t \delta_s\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \delta_s^2\,ds \Big\}.$$

Setzt man $P_L := L_T\,P$ *(Dichte-Maß), so bildet* $\{\widetilde{W}_t\}_{0\leq t\leq T}$ *mit*

$$\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \delta_s\,ds$$

einen Wiener-Prozess (bezüglich $\{\mathcal{A}_t\}_{0\leq t\leq T}$*) unter* P_L.

Eigenschaften von $\{\widetilde{W}_t\}_{0\leq t\leq T} = \{W_t + \delta\,t\}_{0\leq t\leq T}$ (Spezialfall) unter P_L :

(1) Stetige Pfade (P_L-f.s.), da $\{W_t + \delta\,t\}_{0\leq t\leq T}$ P-f.s. stetige Pfade besitzt und P_L zu P äquivalent ist;

(2) Unabhängige, stationäre Zuwächse, denn für $0 \leq s < t$, $u, v \in \mathbb{R}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
& E_{P_L} \exp\Big\{u\,\widetilde{W}_s + v(\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s)\Big\} \\
= \;& E_P \exp\Big\{u\,W_s + v(W_t - W_s) + \delta\big(u\,s + v(t-s)\big) - \delta\,W_T - \frac{\delta^2}{2}\,T\Big\} \\
= \;& \exp\Big\{\frac{u^2}{2}\,s + \frac{v^2}{2}\,(t-s)\Big\}.
\end{aligned}
$$

[Motivation: Die Verschiebung wird durch L_T kompensiert.]

Bewertung und Hedging von Optionen:

Es wird sich auch hier zeigen, dass es ein zu P äquivalentes W-Maß P^* gibt, unter dem der diskontierte Asset-Prozess $\{\widetilde{S}_t\}_{0 \leq t \leq T}$, $\widetilde{S}_t = e^{-rt}\,S_t$, ein Martingal bildet.

Aus der stochastischen Differentialgleichung $dS_t = S_t\,(\mu\,dt + \sigma\,dW_t)$ folgt über partielle Integration:

$$
\begin{aligned}
d\widetilde{S}_t \;&=\; -r\,e^{-r\,t}\,S_t\,dt \;+\; e^{-r\,t}\,dS_t \\
&=\; \widetilde{S}_t\big((\mu - r)\,dt \;+\; \sigma\,dW_t\big)\,.
\end{aligned}
$$

Wählt man $\widetilde{W}_t = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma}\,t =: W_t + \delta^*\,t$, also $\sigma\,d\widetilde{W}_t = \sigma\,dW_t + (\mu - r)\,dt$, so ergibt sich:

$$
d\widetilde{S}_t \;=\; \widetilde{S}_t\,\sigma\,dW_t\,.
$$

Nach dem Girsanov–Theorem (Satz 12.2) ist

$$
P^* \;=\; \exp\Big\{-\,\delta^*\,W_T - \frac{\delta^{*2}}{2}\,T\Big\}\,P
$$

ein zu P äquivalentes W-Maß, unter dem $\{\widetilde{W}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ einen Wiener-Prozess bildet.

Nach Beispiel 11.2 gilt P^*- (und damit P-) f.s.:

$$
\widetilde{S}_t \;=\; \widetilde{S}_0\,\exp\Big\{\sigma\,\widetilde{W}_t - \frac{\sigma^2}{2}\,t\Big\}, \quad 0 \leq t \leq T\,,
$$

und $\{\widetilde{S}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ ist P^*-Martingal.

Man beachte, dass die Definition des stochastischen Integrals unter dem Wechsel zu einem äquivalenten W-Maß P^* unverändert bleibt, denn allgemein gilt:

$$
\begin{aligned}
X_n \xrightarrow{P} X \;&\Longleftrightarrow\; \forall\,\{X_{n_k}\} \subset \{X_n\}\;\; \exists\,\{X_{\tilde{n}_k}\} \subset \{X_{n_k}\}:\;\; \{X_{\tilde{n}_k}\} \xrightarrow{P-f.s.} X \\
&\Longleftrightarrow\; \forall\,\{X_{n_k}\} \subset \{X_n\}\;\; \exists\,\{X_{\tilde{n}_k}\} \subset \{X_{n_k}\}:\;\; \{X_{\tilde{n}_k}\} \xrightarrow{P^*-f.s.} X \\
&\Longleftrightarrow\; X_n \xrightarrow{P^*} X\,.
\end{aligned}
$$

Wir werden jetzt „europäische Optionen" bewerten unter „zulässigen Strategien" im Sinne folgender Definition:

Definition 12.2.

a) *Eine Strategie* $\vartheta = \{\vartheta_t\}_{0\le t\le T} = \{(H_{0,t}, H_t)\}_{0\le t\le T}$ *heißt „zulässig", falls sie selbstfinanzierend ist und falls für* $\{\widetilde{V}_t(\vartheta)\}_{0\le t\le T}$, $\widetilde{V}_t(\vartheta) = H_{0,t} + H_t\,\widetilde{S}_t$, *gilt:*

(a1) $\widetilde{V}_t(\vartheta) \;\ge\; 0 \qquad \forall\; 0 \le t \le T\,,$

(a2) $E^*\Big(\sup\limits_{0\le t\le T} \widetilde{V}_t(\vartheta)\Big)^2 \;<\; \infty\,;$

b) *Eine „Option" h, d.h. eine $\mathcal{A}_T$-messbare Funktion h, heißt „duplizierbar", falls gilt:*

(b1) $E^*\big(h^2\big) \;<\; \infty\,,$

(b2) $h \;=\; V_T(\vartheta)$ *für ein zulässiges* $\{\vartheta_t\}_{0\le t\le T}$.

Im Black-Scholes-Modell gilt nun der folgende zentrale Satz:

Satz 12.3. *Sei h eine duplizierbare Option und $\vartheta = \{\vartheta_t\}_{0\le t\le T}$ eine zulässige Strategie mit $h = V_T(\vartheta)$. Dann folgt:*

$$V_t(\vartheta) \;=\; E^*\big(e^{-r(T-t)}\,h \,\big|\, \mathcal{A}_t\big) \quad P\text{-f.s.} \quad \forall\; 0 \le t \le T\,,$$

insbesondere

$$V_0(\vartheta) \;=\; E^*\big(e^{-rT}\,h\big) \quad P\text{-f.s.}$$

Der Wert $E^*\big(e^{-r(t-t)}\,h \,\big|\, \mathcal{A}_t\big)$ heißt „Preis" der Option h zur Zeit t.

Ferner gilt:

Satz 12.4. *Im Black-Scholes-Modell ist jede Option, die durch eine $\mathcal{A}_T$-messbare, nicht-negative $\mathcal{L}^2(P^*)$-Funktion definiert ist, duplizierbar.*

Zum Beweis benötigen wir das folgende Ergebnis (vgl. Karatzas-Shreve (2005), Kap. 3):

Sei $\{M_t\}_{0\le t\le T}$ $\mathcal{L}^2$-Martingal bezüglich der Filterung $\{\mathcal{A}_t\}_{0\le t\le T}$ des Wiener-Prozesses (stetige Pfade, übliche Bedingungen). Dann gilt:

Es gibt einen adaptierten (progressiv messbaren) Prozess $\{H_t\}_{0\le t\le T}$ mit $E\big(\int_0^T H_t^2\,dt\big) < \infty$ derart, dass P-f.s. gilt:

$$M_t \;=\; M_0 \;+\; \int_0^t H_s\,dW_s \qquad \forall\; 0 \le t \le T$$

(Darstellung von $\mathcal{L}^2$-Martingalen).

Bemerkung 12.1. Falls $h = f(S_T)$, z.B. $h = [S_T - K]_+$ (europäischer Call) oder $h = [K - S_T]_+$ (europäischer Put), so ergibt sich $V_t(\vartheta) = F(t, S_t)$ mit einer geeigneten Funktion $F(t,x): [0,T]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} V_t(\vartheta) \;&=\; E^*\big(e^{-r(T-t)}\, f(S_T)\,\big|\,\mathcal{A}_t\big) \\ &=\; E^*\Big(e^{-r(T-t)}\, f\big(S_t\, e^{r(T-t)}\, e^{\sigma(\widetilde{W}_T-\widetilde{W}_t)-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\big)\,\Big|\,\mathcal{A}_t\Big)\,. \end{aligned}$$

Da S_t $\mathcal{A}_t$-messbar ist und $\widetilde{W}_T - \widetilde{W}_t$ unabhängig von $\mathcal{A}_t$ (unter P^*), ergibt sich mit

$$F(t,x) \;=\; E^*\Big(e^{-r(T-t)}\, f\big(x\, e^{r(T-t)}\, e^{\sigma(\widetilde{W}_T-\widetilde{W}_t)-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\big)\Big)$$

sofort: $V_t(\vartheta) \;=\; F(t, S_t)$.

Wir bestimmen die Funktion $F(t,x)$ für europäische Call- und Put-Optionen:

Da $\widetilde{W}_T - \widetilde{W}_t \overset{\mathcal{D}}{=} \sqrt{T-t}\,Z$, $P_Z^* = N(0,1)$, erhält man

<u>für $f_c(x) = [x-K]_+$:</u>

$$F_c(t,x) \;=\; \int e^{-r(T-t)}\big[e^{r(T-t)}\, x\, e^{\sigma z\sqrt{T-t}-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} - K\big]_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz\,.$$

Setzt man $\tau = T - t$ und

$$\boxed{z_1 \;=\; \frac{\log(x/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})\,\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\,, \qquad z_2 \;=\; z_1 - \sigma\sqrt{\tau}\,,}$$

so gilt:

$$\big[e^{r(T-t)}\, x\, e^{\sigma z\sqrt{T-t}-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} - K\big]_+ > 0 \quad\Longleftrightarrow\quad z > -z_2 \quad\Longleftrightarrow\quad -z < z_2\,.$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} F_c(t,x) \;&=\; \int_{-z_2}^{\infty} \big(x\, e^{\sigma\sqrt{\tau}\,z-\frac{\sigma^2\tau}{2}} - K\, e^{-r\tau}\big)\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz \\ &=\; \int_{-\infty}^{z_2} \big(x\, e^{-\sigma\sqrt{\tau}\,z-\frac{\sigma^2\tau}{2}} - K\, e^{-r\tau}\big)\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz\,. \end{aligned}$$

Transformiert man im 1. Anteil des Integrals

$$\widetilde{z} \;=\; z \;+\; \sigma\sqrt{\tau}\,, \qquad d\widetilde{z} \;=\; dz\,,$$

so erhält man mit $\Phi(z) = P^*(Z \le z)$:

$$\boxed{F_c(t,x) \;=\; x\,\Phi(z_1) \;-\; K\,e^{-r\,\tau}\,\Phi(z_2)\,.}$$

Mit denselben Überlegungen und Bezeichnungen (oder über die Call-Put-Parität) ergibt sich für die europäische Put-Option , also

für $f_p(x) = [K-x]_+$:

$$\boxed{F_p(t,x) \;=\; K\,e^{-r\,\tau}\,\Phi(-z_2) \;-\; x\,\Phi(-z_1)}$$

[Black-Scholes-Formeln] .

Abschließend zeigen wir noch, dass es möglich ist, eine Hedge-Strategie für Optionen $h = f(S_T)$ explizit zu bestimmen :

Wir haben $\widetilde{V}_t(\vartheta) = e^{-r\,t}\,F(t,S_t)$ und wollen annehmen, dass $F \in C^\infty\big([0,T]\times\mathbb{R}\big)$, was z.B. für Call- und Put-Optionen erfüllt ist .

Mit $\widetilde{F}(t,x) := e^{-r\,t}\,F\big(t, x\,e^{r\,t}\big)$ ergibt sich, dass $\widetilde{V}_t(\vartheta) \;=\; \widetilde{F}(t,\widetilde{S}_t)$.

Über die Itô-Formel erhält man :

$$\begin{aligned}\widetilde{F}(t,\widetilde{S}_t) \;&=\; \widetilde{F}(0,S_0) \;+\; \int_0^t \widetilde{F}_t(s,\widetilde{S}_s)\,ds \;+\; \int_0^t \widetilde{F}_x(s,\widetilde{S}_s)\,d\widetilde{S}_s \\ &\qquad + \frac{1}{2}\int_0^t \widetilde{F}_{xx}(s,\widetilde{S}_s)\,d\langle\widetilde{S},\widetilde{S}\rangle_s\,.\end{aligned}$$

Wegen $d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_t\,\sigma\,d\widetilde{W}_t$, gilt $d\langle\widetilde{S},\widetilde{S}\rangle_s = \sigma^2\,\widetilde{S}_s^2\,ds$ und

$$\widetilde{F}(t,\widetilde{S}_t) \;=\; \widetilde{F}(0,S_0) \;+\; \int_0^t \sigma\,\widetilde{F}_x(s,\widetilde{S}_s)\,\widetilde{S}_s\,d\widetilde{W}_s \;+\; \int_0^t \widetilde{K}_s\,ds\,,$$

mit geeignetem $\widetilde{K}_s$.

Da $\widetilde{V}_t(\vartheta) = \widetilde{F}(t,\widetilde{S}_t)$ P^*-Martingal und die Darstellung von Itô-Prozessen P^*-f.s. eindeutig ist , muss $\widetilde{K}_s \equiv 0$ P^*-f.s. gelten und somit :

$$\begin{aligned}\widetilde{F}(t,\widetilde{S}_t) \;&=\; \widetilde{F}(0,S_0) \;+\; \int_0^t \sigma\,\widetilde{F}_x(s,\widetilde{S}_s)\,\widetilde{S}_s\,d\widetilde{W}_s \\ &=\; \widetilde{F}(0,S_0) \;+\; \int_0^t \frac{\partial\widetilde{F}}{\partial x}(s,\widetilde{S}_s)\,d\widetilde{S}_s\,,\end{aligned}$$

also

$$\widetilde{V}_t(\vartheta) \;=\; V_0(\vartheta) \;+\; \int_0^t \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}(s, \widetilde{S}_s)\, d\widetilde{S}_s\,.$$

Folglich ist

$$\boxed{H_t \;:=\; \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}(t, \widetilde{S}_t) \;=\; \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t)}$$

geeignet. Mit $H_{0,t} := \widetilde{F}(t, \widetilde{S}_t) - H_t\, \widetilde{S}_t$ ist $\vartheta = \{(H_{0,t}, H_t)\}_{0 \le t \le T}$ zulässig mit

$$\boxed{V_T(\vartheta) \;=\; e^{rT}\, \widetilde{V}_T(\vartheta) \;=\; e^{rT}\, \widetilde{F}(T, \widetilde{S}_T) \;=\; F(T, S_T) \;=\; f(S_T)\,.}$$

Bemerkung 12.2. In der obigen Herleitung ist die Darstellung von $\mathcal{L}^2$-Martingalen als stochastische Integrale nicht benutzt worden.

Für die europäischen Call- bzw. Put-Optionen ergibt sich:

$$\boxed{\frac{\partial F_c}{\partial x}(t, x) \;=\; \Phi(z_1) \qquad \underline{\text{und}} \qquad \frac{\partial F_p}{\partial x}(t, x) \;=\; -\Phi(-z_1)\,.}$$

<u>Sprechweisen</u>: Hat der Wert $V_t(\vartheta)$ eines Portfolios zur Zeit t eine Darstellung $V_t(\vartheta) = \Psi(t, S_t)$, so nennt man

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial x}(t, S_t) &\quad : \quad \text{„}\underline{\text{Delta}}\text{“ der Option},\\
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(t, S_t) &\quad : \quad \text{„}\underline{\text{Gamma}}\text{“ der Option},\\
\frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, S_t) &\quad : \quad \text{„}\underline{\text{Theta}}\text{“ der Option},\\
\frac{\partial \Psi}{\partial \sigma}(t, S_t) &\quad : \quad \text{„}\underline{\text{Vega}}\text{“ der Option},
\end{aligned}$$

wobei σ die „<u>Volatilität</u>“ des Asset-Prozesses bezeichnet.