2 Halbgruppen von Übergangswahrscheinlichkeiten. Markov-Prozesse

Im Folgenden sei $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ ein (polnischer) Messraum und $T = [0, \infty)$ oder $T = \mathbb{N}_0$.

> **Definition 2.1.** *Eine Familie* $(P_t)_{t \in T}$ *von Übergangswahrscheinlichkeiten auf* $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ *mit*
>
> (2.1) $\quad P_{s+t} = P_s P_t \quad \forall\, s, t \in T$
>
> *heißt* <u>*Halbgruppe von Übergangswahrscheinlichkeiten*</u> *auf* $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$.

<u>Zu den Bezeichnungen</u>:

$P_t : \mathcal{X} \times \mathcal{B} \to [0, 1]$ mit

(i) $B \mapsto P_t(x, B)$ W-Maß auf $\mathcal{B}$ $\forall\, x \in \mathcal{X}$;

(ii) $x \mapsto P_t(x, B)$ $\mathcal{B}$-messbar $\forall\, B \in \mathcal{B}$.

<u>Interpretation</u>: $P_t(x, B)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit eines Übergangs von x nach B in der Zeit t.

Hierbei ist $P_s P_t$ wie folgt definiert:

$$P_s P_t\,(x, B) := \int P_s(y, B)\, P_t(x\, dy)$$

$\big($totale Wahrscheinlichkeit des Übergangs von x nach y gemäß $P_t(x, \cdot)$ und des anschließenden Übergangs von y nach B gemäß $P_s(\cdot, B)\big)$.

Die Relationen (2.1) heißen <u>Chapman-Kolmogorov-Gleichungen</u>.

Wegen $s + t = t + s$ ist die Halbgruppe automatisch <u>kommutativ</u>, also $P_s P_t = P_t P_s$. Wir nehmen im Folgenden stets an, dass $P_0 = I$, wobei

$$(2.2) \qquad I(x, B) = \varepsilon_x(B) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \in B \\ 0, & \text{sonst} \end{array} \right\} = I_B(x)$$

den (so genannten) „<u>Einheitskern</u>“ bezeichnet.

Beispiel 2.1.

a) $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = \big(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})\big)$, $T = \mathbb{N}_0$, $\mathbb{P}$ stochastische Matrix

Dann erhält man mit

$$P_1(i, B) := P(i, B) := \sum_{j \in B} p_{ij} \quad \text{und}$$
$$P_n := P_1^n$$

eine Halbgruppe von Übergangswahrscheinlichkeiten. Es besteht offenbar eine Bijektion zwischen den stochastischen Matrizen $\mathbb{P}$ über $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und den Übergangswahrscheinlichkeiten $P = P_1$ auf $\big(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})\big)$.

b) Seien $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1)$ und $(\mu_t)_{t \in T}$ eine Faltungshalbgruppe von W-Maßen auf $\mathcal{B}^1$, d.h. $\mu_{s+t} = \mu_s * \mu_t \ \ (s, t \in T)$. Dann liefert

$$P_t(x, B) \ := \ \mu_t(B - x) \ = \ \text{Bildmaß von } \mu_t \text{ unter der Translation } y \ \mapsto \ y + x$$

eine (so genannte) Faltungshalbgruppe von Übergangswahrscheinlichkeiten. (P_t) ist translationsinvariant (bzw. räumlich homogen), d.h. es gilt

$$P_t(x, B) \ = \ P_t(x + z, B + z) \quad \forall\, x, z \in \mathcal{X}, \ B \in \mathcal{B}.$$

Speziell:

1) $\mu_t \ = \ N(0, t) \quad (t > 0)$, $\mu_0 = \varepsilon_0$, Brown'sche Halbgruppe;
2) $\mu_t \ = \ \pi_t \quad (t > 0)$, $\mu_0 = \varepsilon_0$, Poisson'sche Halbgruppe;
3) Für $0 < \alpha \leq 2$; $\gamma > 0$, seien (μ_t) W-Maße mit charakteristischen Funktionen $\varphi_t(\tau) \ = \ \exp(-\gamma\, t\, |\, \tau\, |^{\,\alpha})$, $\tau \in \mathbb{R}$ (stabile Verteilung der Ordnung α). Die (μ_t) bilden wegen $\varphi_{s+t} \ = \ \varphi_s\, \varphi_t$ eine Faltungshalbgruppe;
   $\alpha = 2$, $\gamma = \frac{1}{2}$: Brown'sche Halbgruppe;
   $\alpha = 1$, $\gamma = 1$: Cauchy'sche Halbgruppe.

Der entscheidende Satz ist nun:

Satz 2.1. *Seien $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ ein polnischer Messraum, $T = [0, \infty)$ oder $T = \mathbb{N}_0$, μ ein W-Maß auf $\mathcal{B}$ und $(P_t)_{t \in T}$ eine Halbgruppe von Übergangswahrscheinlichkeiten auf $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$.*

Dann existiert ein stochastischer Prozess $\{X_t\}_{t \in T}$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Zustandsraum $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ und endlich-dimensionalen Verteilungen (für $t_1 < \ldots < t_n$, $B \in \mathcal{B}^n$)

$$\text{(2.3)}\quad \mu_{t_1, \ldots, t_n}(B) \ = \ \int \ldots \int I_B(x_1, \ldots, x_n) P_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) \cdots P_{t_1}(x_0, dx_1) \mu(dx_0),$$

$$\mu_{t_{\pi(1)}, \ldots, t_{\pi(n)}}(B_\pi) \ = \ \mu_{t_1, \ldots, t_n}(B), \quad \pi \ \textit{ beliebige Permutation}.$$

Bemerkung 2.1. Bei gegebener Halbgruppe $(P_t)_{t \in T}$ von Übergangswahrscheinlichkeiten hängt das W-Maß P im Satz 2.1 nur von μ ab, also $P = P^\mu$. Die endlich-dimensionalen Verteilungen sind festgelegt durch (für $t_1 < \ldots < t_n$; $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$):

$$(2.4)\qquad P^\mu(X_{t_1}\in B_1,\dots,X_{t_n}\in B_n)$$
$$\overset{(2.3)}{=} \int\limits_{\mathcal{X}}\int\limits_{B_1}\dots\int\limits_{B_n} P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},dx_n)\cdots P_{t_1}(x_0,dx_1)\,\mu(dx_0)\,.$$

Für $\mu=\varepsilon_x$ schreiben wir $P^\mu=P^x$ und erhalten:

$$(2.5)\qquad P^x(X_{t_1}\in B_1,\dots,X_{t_n}\in B_n) \;=\; \int\limits_{B_1}\dots\int\limits_{B_n} P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},dx_n)\cdots P_{t_1}(x,dx_1)\,.$$

Ein Vergleich von (2.4) und (2.5) liefert:

$$(2.6)\qquad P^\mu(A) \;=\; \int\limits_{\mathcal{X}} P^x(A)\,\mu(dx) \quad \forall\; A\in\mathcal{A}\,,$$

da die Zylindermengen einen $\cap$-stabilen Erzeuger von $\mathcal{A}$ bilden.

Beachtet man, dass wegen (2.5) für $n=1$ $(t_0=0)$ noch $P^x(X_t\in B)=P_t(x,B)$ bzw.

$$(2.7)\qquad P^\mu(X_t\in B) \;=\; \int P_t(x,B)\,\mu(dx)\,,$$

gilt, so lässt sich in der Tat der Prozess $\{X_t\}$ als ein stochastisches Modell für die Position eines Teilchens zur Zeit t interpretieren (unter den Übergangswahrscheinlichkeiten P_t).

Mit $P_0=I$ ergibt sich noch

$$(2.8)\qquad P^\mu(X_0\in B) \;=\; \mu(B)\,,\quad B\in\mathcal{B}\,,$$

d.h. μ kann als <u>Anfangsverteilung</u> des Teilchens (z.Zt. $t=0$) aufgefasst werden.

Wir betrachten die zu $\{X_t\}_{t\in T}$ gehörige (so genannte) <u>kanonische Filterung</u> $\{\mathcal{A}_t^0\}_{t\in T}$, d.h.

$$\mathcal{A}_t^0 \;=\; \mathcal{A}(X_s; s\le t)\,,\quad t\in T\,.$$

$\{\mathcal{A}_t^0\}$ ist eine aufsteigende Familie von Teil-σ-Algebren von $\mathcal{A}$ und X_t ist nach Konstruktion $\mathcal{A}_t$-messbar.

$\mathcal{A}_t^0$ kann als die durch den Prozess $\{X_s\}$ bis z.Zt. t gegebene Information aufgefasst werden (<u>σ-Algebra der t-Vergangenheit</u>). Später werden auch feinere <u>Filterungen</u> $\{\mathcal{A}_t\}$, d.h. Teil-σ-Algebren $\mathcal{A}_t\subset\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_t\uparrow$ und X_t $\mathcal{A}_t$-messbar, eine Rolle spielen.

$\{\mathcal{A}_t^0\}$ ist die gröbste Filterung, für die gilt, dass X_t messbar ist bezüglich der t-ten Teil-σ-Algebra.

$\{X_t\}$ ist nun ein Markov-Prozess im Sinne folgender

Definition 2.2. *Ein stochastischer Prozess* $\{X_t\}_{t\in T}$ *auf* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *der messbar ist bezüglich einer Filterung* $\{\mathcal{A}_t\}_{t\in T}$, *heißt Markov-Prozess, falls gilt:*

$$(2.9) \qquad P(X_t \in B \,|\, \mathcal{A}_s) \;=\; P(X_t \in B \,|\, X_s) \quad P\text{-f.s.} \quad \forall\, s < t\,,\; B \in \mathcal{B}\,.$$

Die Eigenschaft (2.9) *heißt „elementare Markov-Eigenschaft“.*

Bemerkung 2.2. Da die σ-Algebren $\mathcal{A}_s$ wieder von den endlich-dimensionalen Zylindermengen erzeugt werden, genügt es, statt (2.9) zu fordern

$$(2.10) \quad P(X_t \in B \,|\, X_{s_1}, \ldots, X_{s_n}) \;=\; P(X_t \in B \,|\, X_{s_n}) \quad \forall\, s_1 < \ldots < s_n < t\,,\; B \in \mathcal{B}\,.$$

Beispiel 2.2.

a) $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ Folge unabhängiger ZV. (vgl. Beispiel 1.1);

b) $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ Markov-Kette (vgl. Beispiel 1.4);

c) $\{N_t\}_{t\geq 0}$ Poisson-Prozess (vgl. Beispiel 1.2);

d) $\{X_t\}_{t\geq 0}$ Wiener-Prozess (vgl. Beispiel 1.3);

e) $\{X_t\}_{t\geq 0}$ Prozess mit unabhängigen Zuwächsen, d.h. für $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ sind die ZV. $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ unabhängig.

Satz 2.2. *Der gemäß* Satz 2.1 *existierende stochastische Prozess* $\{X_t\}_{t\in T}$ *ist ein Markov-Prozess bezüglich der kanonischen Filterung* $\{\mathcal{A}_t^0\}_{t\in T}$.

Ferner gilt für $s < t$ *und* $B \in \mathcal{B}$:

$$(2.11) \quad P(X_t \in B \,|\, \mathcal{A}_s^0) \;=\; P_{t-s}(X_s, B) \quad P\text{-f.s.},$$

wobei mit $P_{t-s}(X_s, B)$ *die ZV.* $\omega \mapsto P_{t-s}(X_s(\omega), B)$ *bezeichnet ist.*

Als abschließendes Beispiel betrachten wir noch:

Beispiel 2.3. (Markov-Kette in stetiger Zeit) $T = [0, \infty)$, $(\mathcal{X}, B) = \big(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)\big)$

Seien $\Lambda = \big(\!\big(\lambda_{ij}\big)\!\big)_{i,j\in\mathbb{N}_0}$ eine Matrix mit $\sum\limits_j |\,\lambda_{ij}\,| \leq c \;\; \forall\, i$ und $\mathbb{A} = \big(\!\big(a_{ij}\big)\!\big)_{i,j\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$a_{ij} \;=\; \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_{ij} & , & i \neq j \\ -\lambda_{ii} & , & i = j \end{array} \right\}.$$

Gilt $\lambda_{ij} \geq 0$ und $\sum\limits_{j \neq i} \lambda_{ij} = \lambda_{ii}$, so sind die Matrizen

$$\mathbb{P}(t) \;:=\; e^{t\,\mathbb{A}}\,, \quad t \geq 0\,,$$

wohldefiniert (punktweiser Limes) und mit

$$P_t(i,B) \;:=\; \sum_{j \in B} p_{ij}(t)\,, \quad i \in \mathbb{N}_0\,,\; B \subset \mathbb{N}_0\,,$$

ist eine Halbgruppe von Übergangswahrscheinlichkeiten auf $\big(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)\big)$ gegeben:

1) Mit $\mathbb{A}^n = \big(\!\big(a_{ij}^{(n)}\big)\!\big)$, $n = 1, 2, \ldots$, gilt: $|\,a_{ij}^{(n)}\,| \;\leq\; c^n$;

2) $P_{s+t}(i,B) \;=\; \displaystyle\int P_s(k,B) P_t(i,dk)$;

3) $P_t(i,\,\boldsymbol{\cdot}\,)$ ist W-Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$;

4) $\lambda_{ij} \;=\; \displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} \quad (i \neq j)$;

5) $\lambda_{ii} \;=\; \displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t}$.

Folglich

4') $p_{ij}(t) \;=\; \lambda_{ij}\, t \;+\; o(t) \quad (i \neq j)$;

5') $p_{ii}(t) \;=\; 1 - \lambda_{ii}\, t \;+\; o(t)$.

Es gelten die Kolmogorov-Vorwärtsgleichungen bzw. -Rückwärtsgleichungen, ein System von Differentialgleichungen für die $p_{ij}(t)$, aus denen diese mit $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$ (prinzipiell) bestimmt werden können:

<u>Rückwärtsgleichungen</u>:

6) $p'_{ij}(t) \;=\; -\,\lambda_{ii}\, p_{ij}(t) \;+\; \sum\limits_{k \neq i} \lambda_{ik}\, p_{kj}(t)$ bzw.

6') $\mathbb{P}'(t) \;=\; \mathbb{A}\,\mathbb{P}(t)$;

<u>Vorwärtsgleichungen</u>:

7) $p'_{ij}(t) \;=\; -\,p_{ij}(t)\, \lambda_{jj} \;+\; \sum\limits_{k \neq j} p_{ik}(t)\, \lambda_{kj}$ bzw.

7') $\mathbb{P}'(t) \;=\; \mathbb{P}(t)\,\mathbb{A}$.

<u>Bezeichnung</u>: Die Matrix $\mathbb{A}$ heißt (infinitesimaler) Erzeuger der Halbgruppe (P_t) von Übergangswahrscheinlichkeiten, die wiederum mit den Matrizen $\big(\mathbb{P}(t)\big)$ identifiziert werden können.

Speziell: Poisson-Prozess

Seien $\lambda_{i,i+1} = \lambda\,,\ \lambda_{ii} = \lambda\,,\ \lambda_{ij} = 0\ \ (j < i\ \vee\ j > i+1)\,,$ d.h.

$$\begin{array}{lcl} p_{i,i+1}(t) & = & \lambda t\ +\ o(t)\,, \\ p_{ii}(t) & = & 1\ -\ \lambda t\ +\ o(t)\,, \\ p_{ij}(t) & = & o(t) \qquad (j < i\ \vee\ j > i+1)\,. \end{array}$$

Mit der Anfangsverteilung $p(0) = \big(p_i(0)\big)_{i=0,1,\ldots} = (1,0,\ldots)$ und der Bezeichnung $p_n(t) := p_{0n}(t)\ \ (n = 0,1,\ldots)$ erhält man aus 6) das folgende Differentialgleichungssystem:

$$\begin{array}{lclcl} p_0'(t) & = & -\lambda\, p_0(t) & \overset{p_0(0)=1}{\Longrightarrow} & p_0(t) = e^{-\lambda t}\,, \\ p_1'(t) & = & -\lambda\, p_1(t) + \lambda p_0(t) & \overset{p_1(0)=0}{\Longrightarrow} & p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}\,, \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ p_n'(t) & = & -\lambda\, p_n(t) + \lambda\, p_{n-1}(t) & \overset{p_n(0)=0}{\Longrightarrow} & p_n(t) = \dfrac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}\,, \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \end{array}$$

Der Poisson-Prozess bildet somit eine Markov-Kette in stetiger Zeit mit den obigen Intensitäten und Anfangsverteilung ε_0 !