3 Prozesse mit unabhängigen, stationären Zuwächsen

In diesem Paragraphen untersuchen wir eine wichtige Teilklasse von Markov-Prozessen.

Definition 3.1. *Sei* $\{X_t\}_{t\in T}$, $T = \mathbb{N}_0$ *oder* $T = \mathbb{R}_+$, *ein stochastischer Prozess auf* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *mit Zustandsraum* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$. *Man sagt,* $\{X_t\}$ *besitzt*

a) *unabhängige Zuwächse* $:\Longleftrightarrow \quad \forall\, 0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_n\,,\ n \in \mathbb{N}:$

$X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ *sind unabhängige ZV.*;

b) *stationäre Zuwächse* $:\Longleftrightarrow \quad \forall\, 0 \le s < t,\ s,t \in T:$

Die Verteilung von $X_t - X_s$ *hängt nur von* $t - s$ *ab*.

Stochastische Prozesse $\{X_t\}$ mit unabhängigen, stationären Zuwächsen erhält man aus Faltungshalbgruppen (μ_t) auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ und einer Startverteilung μ.

Satz 3.1. *Seien* $(\mu_t)_{t\in T}$, $T = \mathbb{N}_0$ *oder* $T = \mathbb{R}_+$, *eine Faltungshalbgruppe und* μ *ein W-Maß auf* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$. *Dann gelten die folgenden Aussagen:*

a) *Der kanonische Prozess* $\{X_t\}$ *auf* $\big((\mathbb{R}^d)^T,\ (\mathcal{B}^d)^T\big)$ *mit endlich-dimensionalen Verteilungen gemäß* $(K1), (K2)$ *und*

$$\mu_{t_0,\ldots,t_n} \;=\; Q_{X_0, X_0+Y_1, \ldots, X_0+Y_1+\cdots+Y_n}\,, \tag{3.1}$$

wobei $Q_{X_0,Y_1,\ldots,Y_n} = \mu \otimes \mu_{t_1} \otimes \mu_{t_2-t_1} \otimes \cdots \otimes \mu_{t_n-t_{n-1}}$ *für* $0 = t_0 < \ldots < t_n$, *besitzt unabhängige, stationäre Zuwächse*.

b) $\{X_t\}$ *ist ein Markov-Prozess bezüglich der kanonischen Filterung* $\{\mathcal{A}_t^0\}_{t\in T}$, $\mathcal{A}_t^0 = \mathcal{A}(X_s; s \le t)$, *mit Übergangswahrscheinlichkeiten*

$$P_t(x, B) \;:=\; \mu_t(B - x)\,, \quad t > 0\,, \tag{3.2}$$

und Startverteilung $P_{X_0} = \mu$.

Satz 3.1 liefert zu jeder Faltungshalbgruppe (μ_t) kanonisch einen Prozess $\{X_t\}$ mit unabhängigen, stationären Zuwächsen und Übergangswahrscheinlichkeiten $P_t(x,B) = \mu_t(B - x)$.

Umgekehrt gehört zu jedem stochastischen Prozess mit unabhängigen, stationären Zuwächsen eine Faltungshalbgruppe, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 3.2. *Für jeden stochastischen Prozess* $\{X_t\}_{t\in T}$, $T = \mathbb{N}_0$ *oder* $T = \mathbb{R}_+$, *mit Zustandsraum* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ *definiert*

$$\mu_t \ := \ P_{X_t - X_0}$$

eine Faltungshalbgruppe (μ_t) *von W-Maßen auf* $\mathcal{B}^d$.

Die endlich-dimensionalen Verteilungen von $\{X_t\}_{t\in T}$ *ergeben sich wie die des kanonischen Prozesses gemäß* (3.1) *aus dieser Faltungshalbgruppe.*

Wir betrachten jetzt stochastische Prozesse mit unabhängigen, stationären Zuwächsen, Parametermenge $T = [0, \infty)$ und Zustandsraum $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$.

Solche Prozesse besitzen eine Reihe von Regularitätseigenschaften, z.B.

Satz 3.3. $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ *mit Zustandsraum* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ *besitze unabhängige, stationäre Zuwächse. Ferner gelte* $X(0) = 0$ *P-f.s.* $\Longrightarrow$

Die Verteilung von $X(t)$ *ist unbegrenzt teilbar, d.h.*

$\forall\ n \in \mathbb{N}\ \ \exists$ *i.i.d. ZV.* $Y_1^{(n)}, \ldots, Y_n^{(n)}$: $X(t) \overset{\mathcal{D}}{=} Y_1^{(n)} + \cdots + Y_n^{(n)}$ $(t$ *fest*$)$.

Betrachtet man die charakteristischen Funktionen $\varphi_t(u) := Ee^{i\langle u, X(t)\rangle}$, so ergibt sich:

$$\varphi_0(u) \ \equiv \ 1\,, \ \varphi_{t+s}(u) \ = \ \varphi_t(u)\,\varphi_s(u)\,.$$

Falls z.B. $\varphi_t(u)$ rechtsstetig ist in t $(\forall\ u \in \mathbb{R}^d$ fest$)$, so gilt:

(3.3) $$\varphi_t(u) \ = \ \big(\varphi_1(u)\big)^t, \quad t \geq 0\,, \ u \in \mathbb{R}^d\,.$$

Satz 3.4. $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ *besitze unabhängige, stationäre Zuwächse,* $X(0) = 0$ *P-f.s. und* $\varphi_t(u) = Ee^{i\langle u, X(t)\rangle}$ *sei rechtsstetig in* $t = 0$ $\big(\forall\ u \in \mathbb{R}^d$ *fest*$\big)$ $\Longrightarrow$

a) $\varphi_t \ = \ (\varphi_1)^t$, *wobei* φ_1 *charakteristische Funktion einer unbegrenzt teilbaren Verteilung ist;*

b) $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ *ist stetig nach Wahrscheinlichkeit, d.h.*
$\forall\ t_0 \geq 0\,,\ t_n \to t_0\ \ (n \to \infty)$: $\quad X(t_n) \xrightarrow[(n\to\infty)]{P} X(t_0)$.

Beispiel 3.1. (vgl. Beispiel 2.1)
Poisson-Prozess, Wiener-Prozess, stabile Verteilungen (allgemein: Faltungshalbgruppen)

Bemerkung 3.1. $\big($vgl. Rogers & Williams (2000), I.28$\big)$
Die charakteristische Funktion einer unbegrenzt teilbaren Verteilung hat eine ganz bestimmte Struktur:

Satz 3.5. (*Lévy-Khintchine-Darstellung*)

a) *Für* $b \in \mathbb{R}^d$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ *positiv semidefinit und jedes Maß* ν *auf* $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ *mit*

$$(3.4) \qquad \int \big(\,|\,x\,|^{\,2} \wedge 1\big)\,\nu(dx) < \infty \qquad \big(a \wedge b := \min\{a,b\}\big)$$

definiert die Funktion $\varphi:\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *mit* $\varphi(u) = \exp \Psi(u)$,

$$(3.5) \quad \Psi(u) \;=\; i\,\langle u,b\rangle - \frac{1}{2}\,u^T \Sigma\, u + \int \big(e^{\,i\,\langle u,x\rangle} - 1 - i\,\langle u,x\rangle I_{\{\,|\,x\,|\,\le 1\}}\big)\,\nu(dx)$$

die charakteristische Funktion einer unbegrenzt teilbaren Verteilung auf $\mathcal{B}^d$ $\Big(\langle u,x\rangle := \sum\limits_{i=1}^{d} u_i x_i\,,\ |\,x\,| \,=\, \sqrt{\langle x,x\rangle}\,\Big)$.

b) *Die charakteristische Funktion* φ *einer unbegrenzt teilbaren Verteilung auf* $\mathcal{B}^d$ *kann in der Form* $\varphi(u) = \exp\Psi(u)$ *mit* Ψ *wie in* (3.5) *dargestellt werden, wobei das Tripel* $\big(b,\Sigma,\nu\big)$ *durch die Verteilung eindeutig bestimmt ist.*

Bezeichnung: ν *heißt das Lévy-Maß zur unbegrenzt teilbaren Verteilung mit charakteristischer Funktion* φ.

Beispiel 3.1. $\big($Fortsetzung, $d = 1$, $\Sigma =:\ \sigma^2\big)$

a) Poisson-Prozess: $\quad X(t) \overset{\mathcal{D}}{\sim} \pi_{\lambda t}$

$$\varphi_t(u) \;=\; Ee^{iuX(t)} \;=\; \exp\big\{\lambda t\,\big(e^{iu} - 1\big)\big\}\,,$$

also $\nu = \lambda t\,\varepsilon_1$, $\sigma^2 = 0$, $b = \lambda t$ liefert die gewünschte Darstellung.

b) Wiener-Prozess: $\quad X(t) \overset{\mathcal{D}}{\sim} N\,(at, \sigma_0^2 t)$

$$\varphi_t(u) \;=\; \exp\Big(iat - \frac{t\,\sigma^2 u^2}{2}\Big)\,,$$

also $\nu \equiv 0$, $\sigma^2 \,=\, \sigma_0^2 t$, $b = at$.

c) Cauchy-Prozess (stabile Verteilung der Ordnung $\alpha = 1$):

$$\varphi_t(u) \;=\; \exp\big(-\gamma\, t\, |\, u\, |\big)\,, \quad \gamma > 0\,.$$

Wähle $\nu(dx) = \dfrac{\gamma\, t}{\pi}\, \dfrac{1}{x^2}\, I_{\{0<|\,x\,|\leq 1\}}\,,\;\; \sigma^2 = 0 = b$
$\big($vgl. Rogers & Williams (2000)$\big)$.

Aus der Lévy-Khintchine-Darstellung erhält man sofort:

Satz 3.6. *Sei φ_1 charakteristische Funktion einer unbegrenzt teilbaren Verteilung auf $\mathcal{B}^d$ mit Tripel $\big(b, \Sigma, \nu\big)$. Dann existiert ein stochastischer Prozess $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ mit $X(0) = 0$ P-f.s. und Zustandsraum $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$, so dass*

$$\varphi_t(u) \;=\; Ee^{\,i\,\langle u, X(t)\rangle} \;=\; \big(\varphi_1(u)\big)^t\,, \quad t \geq 0\,.$$