4 Martingale (in stetiger Zeit)

Für die weitere Diskussion von Eigenschaften stochastischer Prozesse ist es notwendig, den Martingalbegriff (Sub-, Supermartingalbegriff) auf Familien $\{X_t\}_{t\geq 0}$ reellwertiger, integrierbarer ZV. auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ zu erweitern. Wir setzen dabei Kenntnisse über Martingale (Sub-, Supermartingale) $\{X_n\}_{n=0,1,\ldots}$ (in diskreter Zeit) als bekannt voraus (vgl. „Stochastik II“, Kap. II).

Zur Definition in stetiger Zeit benötigt man entsprechend eine „Filterung“ $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$ in $\mathcal{A}$, d.h. eine isotone Familie von Teil-σ-Algebren von $\mathcal{A}$. Wir setzen i.F. voraus, dass $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$ die (so genannten) „üblichen Bedingungen“ erfüllt:

(F0) N P-Nullmenge $\big(\text{d.h. } \exists\, A_0 \in \mathcal{A}:\ N \subset A_0 \wedge P(A_0) = 0\big)$
$\Longrightarrow \quad N \in \mathcal{A}_0$ „Vollständigkeit“;

(F1) $\mathcal{A}_t \;=\; \mathcal{A}_{t+} \;:=\; \bigcap\limits_{s>t} \mathcal{A}_s \quad \forall\, t \geq 0$ „Rechtsstetigkeit“.

Bemerkung 4.1. Eine so genannte Filterung $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$ lässt sich immer so erweitern, dass (F0) und (F1) erfüllt sind. Wähle z.B. mit $\mathcal{N} := \{N:\ N \text{ ist } P\text{-Nullmenge}\}$:

$$\mathcal{A}_t^* \;:=\; \underbrace{\mathcal{A}_{t+} \,\cup\, \mathcal{N}}_{=:\,\{A\cup N:\ A\in\mathcal{A}_{t+},N\in\mathcal{N}\}} \qquad (t \geq 0)\,.$$

Der stochastische Prozess $\{X_t\}_{t\geq 0}$ heißt an die Filterung $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$ adaptiert, falls

$$X_t \quad \mathcal{A}_t\text{-messbar ist} \qquad \forall\, t \geq 0\,.$$

Definition 4.1. *Sei* $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$ *eine Filterung und* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *eine Familie integrierbarer ZV., die an* $\{\mathcal{A}_t\}$ *adaptiert ist. Dann heißt* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *Martingal (Sub-, Supermartingal) bzgl.* $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$*, wenn für alle* $t > s \geq 0$ *gilt:*

$$\begin{array}{rcll} E(X_t \,|\, \mathcal{A}_s) & = & X_s \quad P\text{-f.s.} & (\textit{Martingal})\,; \\ & \geq & & (\textit{Submartingal})\,; \\ & \leq & & (\textit{Supermartingal})\,. \end{array}$$

Beispiel 4.1. Sei $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein Prozess mit unabhängigen, stationären Zuwächsen, $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}(X_s; s \leq t)\ \ \forall\, t \geq 0$, und $EX_t = 0\ \ (\geq 0,\ \leq 0)\ \ \forall\, t \geq 0$. Dann ist $\{X_t\}_{t\geq 0}$ Martingal (Sub-, Supermartingal) bzgl. $\{\mathcal{A}_t\}$.

Speziell: a) Sei $\{N_t\}_{t\geq 0}$ Poisson-Prozess, also $P_{N_t} = \pi_{\lambda t}$

$\Longrightarrow$ $\{N_t\}_{t\geq 0}$ ist Submartingal und $\{N_t - \lambda t\}_{t\geq 0}$ Martingal;

b) Sei $\{W_t\}_{t\geq 0}$ Wiener-Prozess, also $P_{W_t} = N(0,t)$

$\Longrightarrow$ $\{W_t\}_{t\geq 0}$ ist Martingal.

Ferner: $\{W_t^2\}_{t\geq 0}$ ist Submartingal; $\{W_t^2 - t\}_{t\geq 0}$ ist Martingal.

Bemerkung 4.2. Die Submartingale $\{N_t\}_{t\geq 0}$ und $\{W_t^2\}_{t\geq 0}$ lassen sich jeweils in der Form $\{M_t + A_t\}_{t\geq 0}$ darstellen, wobei $\{M_t\}_{t\geq 0}$ ein Martingal ist und $\{A_t\}_{t\geq 0}$ ein isotoner Prozess. Es gilt ein allgemeines Resultat dieser Art (s.u.: Doob-Meyer-Zerlegung; $\{A_t\}_{t\geq 0}$ heißt Kompensator).

Bemerkung 4.3. Sei $\{X_t\}_{t\geq 0}$ Martingal (bzw. Submartingal) bzgl. $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$ und $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ konvex (bzw. monoton wachsend und konvex) mit $E\,|\,h(X_t)\,| < \infty \quad \forall\, t \geq 0$
$\Longrightarrow$ $\{h(X_t)\}_{t\geq 0}$ ist Submartingal bzgl. $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$.

Überquerungen eines kompakten Intervalls $[a,b]$ (durch endlich viele der ZV. $\{X_t\}_{t\geq 0}$)

Sei $I \subset [0,\infty)$, $|\,I\,| < \infty$. Definiere $U_I[a,b]$ $(a < b)$ wie folgt:

$$\sigma_1 \;:=\; \min\{t \in I :\; X_t \leq a\}$$

und rekursiv, für $j = 1, 2, \ldots$,

$$\begin{aligned} \tau_j \;&:=\; \min\{t \in I :\; t \geq \sigma_j\,,\; X_t \geq b\}\,, \\ \sigma_{j+1} \;&:=\; \min\{t \in I :\; t \geq \tau_j\,,\; X_t \leq a\}\,, \end{aligned}$$

wobei $\min\emptyset := +\infty$. (Man beachte: Die j-te „aufsteigende Überquerung" beginnt bei σ_j und wird ggf. bei τ_j abgeschlossen.) Setze nun

$$U_I[a,b] \;:=\; \max\{j :\; \tau_j < \infty\} \quad (\max\emptyset := 0)\,.$$

Für $T \subset [0,\infty)$ beliebig (d.h. nicht notwendig endlich):

$$U_T[a,b] \;:=\; \sup\{U_I[a,b] :\; I \subset T,\, |\,I\,| < \infty\} \quad \text{“Upcrossings”}\,.$$

Analog: $D_T[a,b]$:= Anzahl „absteigender Überquerungen" (“Downcrossings”).

Einige bekannte Ungleichungen für diskrete (Sub-) Martingale übertragen sich auf den stetigen Fall. Zunächst:

Definition 4.2.

a) *Ein reellwertiger stochastischer Prozess* $\{X_t\}_{t \geq 0}$ *heißt* *rechtsstetig* (*linksstetig*)

$:\Longleftrightarrow \quad t \longmapsto X_t(\omega)$ *ist rechtsstetig* (*linksstetig*) $\quad \forall\, \omega \in \Omega$;

b) $\{X_t\}_{t \geq 0}$ *besitzt* *linksseitige* (*rechtsseitige*) *Limiten*

$:\Longleftrightarrow \quad \lim\limits_{\substack{t \uparrow t_0 \\ (t \downarrow t_0)}} X_t(\omega)$ *existiert* $\quad \forall\, t_0 \geq 0 \quad \forall\, \omega \in \Omega$;

c) $\{\widetilde{X}_t\}_{t \geq 0}$ *heißt* *Modifikation* *von* $\{X_t\}$

$:\Longleftrightarrow \quad P(X_t \neq \widetilde{X}_t) = 0 \quad \forall\, t \geq 0$.

Bemerkung 4.4. Unter den „üblichen Bedingungen“ (F0) und (F1) gilt:

a) Falls $\{X_t\}_{t \geq 0}$ an $\{\mathcal{A}_t\}_{t \geq 0}$ adaptiert ist, so auch $\{\widetilde{X}_t\}$;

b) $\{X_t\}_{t \geq 0}$ P-f.s. rechtsstetig (linksstetig)

$\Longrightarrow$ $\exists$ eine Modifikation $\{\widetilde{X}_t\}$: $\{\widetilde{X}_t\}$ ist rechtsstetig (linksstetig);

c) $\{X_t\}_{t \geq 0}$ besitzt P-f.s. linksseitige (rechtsstetige) Limiten

$\Longrightarrow$ $\exists$ eine Modifikation $\{\widetilde{X}_t\}_{t \geq 0}$, die überall linksseitige (rechtsseitige) Limiten besitzt.

Bezeichnung: $\{X_t\}_{t \geq 0}$ heißt „cadlag-Prozess“ $:\Longleftrightarrow$
$\{X_t\}_{t \geq 0}$ ist rechtsstetig und besitzt linksseitige Limiten.

Satz 4.1. (*Submartingal-Ungleichungen*) *Seien* $\{X_t\}_{t \geq 0}$ *ein rechtsstetiges Submartingal bzgl.* $\{\mathcal{A}_t\}_{t \geq 0}$ *und* $[S,T] \subset [0,\infty)$, $a < b$, $\lambda > 0$. *Dann gilt:*

a) 1. *Submartingal-Ungleichung*:

$$P\Big(\sup_{S \leq t \leq T} X_t \geq \lambda\Big) \;\leq\; \frac{1}{\lambda}\, E(X_T^+);$$

b) 2. *Submartingal-Ungleichung*:

$$P\Big(\inf_{S \leq t \leq T} X_t \leq -\lambda\Big) \;\leq\; \frac{1}{\lambda}\,\big\{EX_T^+ - EX_S\big\};$$

c)
$$E\,U_{[S,T]}[a,b] \;\leq\; \frac{E(X_T^+)-a}{b-a}\,,$$
$$E\,D_{[S,T]}[a,b] \;\leq\; \frac{E(X_T-a)^+}{b-a}\,;$$

d) *Doob's Maximalungleichungen: Für $p>1$ erhält man*
$$E\Big(\sup_{S\leq t\leq T} X_t\Big)^p \;\leq\; \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p\, E\big(X_T\big)^p\,,$$
falls $E\big(X_T\big)^p<\infty$ und $X_t\geq 0$ P-f.s.

e) *Pfadeigenschaften: P-f.s. gilt, dass alle Pfade beschränkt sind auf kompakten Intervallen $[S,T]$. Insbesondere existieren überall linksseitige Limiten und die Pfade haben höchstens abzählbar viele Sprungstellen.*

Bemerkung 4.5. Sei $[S,T]\subset[0,\infty)$ ein kompaktes Intervall und
$D[S,T] \;:=\; \{x:\; [S,T]\longrightarrow\mathbb{R}^1 \mid x$ ist cadlag-Funktion$\}$, $D[0,\infty)$ entsprechend.
Dann gilt:

1) $\sup_{t\in[S,T]} x(t) \;<\; \infty \quad \forall\, x\in D[S,T]$;
2) Für beliebiges $\varepsilon>0$ ist $\{t\in[S,T]\,:\,|x(t)-x(t-)|\,\geq\,\varepsilon\}$ endlich für alle $x\in D[S,T]$.
3) $x\in D[0,\infty)$ besitzt höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.

[vgl. z.B. Billingsley (1968): *Convergence of Probability Measures.* Wiley, New York (Chapter 3)]

Auch die Konvergenzsätze für diskrete (Sub-) Martingale übertragen sich auf den stetigen Fall:

Satz 4.2. (*Submartingal-Konvergenz*) *Sei $\{X_t\}_{t\geq0}$ ein rechtsstetiges Submartingal bzgl. $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq0}$ mit*

(i) $\sup_{t\geq0} E\big(X_t^+\big) \;<\; \infty$

$\Longrightarrow \quad X_\infty \;:=\; \lim_{t\to\infty} X_t$ *existiert P-f.s., $E\,|X_\infty|\;<\;\infty$.*

Korollar 4.1. *Seien* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *ein* <u>*nichtnegatives*</u>*, rechtsstetiges Submartingal bzgl.* $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$ *und* $\mathcal{A}_\infty := \mathcal{A}\Big(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{A}_t\Big)$. *Dann sind die folgenden Aussagen* <u>*äquivalent*</u>*:*

a) $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *ist gleichgradig* (P-) *integrierbar*;

b) $\exists\ X_\infty$, $\mathcal{A}_\infty$*-messbar:* $X_t \xrightarrow{\mathcal{L}^1} X_\infty \quad (t \to \infty)$;

c) $\exists\ X_\infty$, $\mathcal{A}_\infty$*-messbar:* $\Big(X_t \xrightarrow{\text{f.s.}} X_\infty\,,\Big)$ $E\,|\,X_\infty\,| < \infty$ *und* $\{X_t\}_{0\leq t\leq\infty}$ *ist ein Submartingal bzgl.* $\{\mathcal{A}_t\}_{0\leq t\leq\infty}$ *(mit „letzter ZV.“* X_∞*)*.

Bemerkung 4.6. Die Implikationen a) $\Longrightarrow$ b) $\Longrightarrow$ c) gelten ohne die Voraussetzung $X_t \geq 0\ \forall\, t$. Letztere Bedingung wird bei bei <u>Sub</u>-Martingalen für den Schluss c) $\Longrightarrow$ a) benötigt. Bei <u>Martingalen</u> gilt:

Korollar 4.2. *Sei* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *ein rechtsstetiges* <u>*Martingal*</u> *bzgl. der Filterung* $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$. *Dann sind die folgenden Aussagen* <u>*äquivalent*</u>*:*

a) $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *ist gleichgradig integrierbar*;

b) $\exists\ X_\infty$, $\mathcal{A}_\infty$*-messbar:* $X_t \xrightarrow{\mathcal{L}^1} X_\infty \quad (t \to \infty)$;

c) $\exists\ X_\infty$, $\mathcal{A}_\infty$*-messbar:* $\Big(X_t \xrightarrow{\text{f.s.}} X_\infty\,,\Big)$ $E\,|\,X_\infty\,| < \infty$ *und* $\{X_t\}_{0\leq t\leq\infty}$ *ist ein Martingal bzgl.* $\{\mathcal{A}_t\}_{0\leq t\leq\infty}$ *(mit „letzter ZV.“* X_∞*)*;

d) $\exists\ Y,\ E\,|\,Y\,| < \infty:\ X_t \;=\; E(Y\,|\,\mathcal{A}_t)$ *P-f.s.* $\quad\forall\ t \geq 0$.

Beispiel 4.2.

a) Sei $\{N_t\}_{t\geq 0}$ ein rechtsstetiger Poisson-Prozess und $u \in \mathbb{R}$. Betrache

$$X_t \;:=\; \exp\big\{u\,N_t - \lambda\,t\,(e^u - 1)\big\} \quad (\geq 0)$$

$\Longrightarrow$ $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ist Martingal bzgl. der kanonischen Filterung mit $EX_t = 1\ \ \forall\, t \geq 0$;

b) Sei $\{W_t\}_{t\geq 0}$ (rechts-) stetiger Wiener-Prozess, $u \in \mathbb{R}$. Betrachte

$$X_t \;:=\; \exp\Big\{u\,W_t - t\,\frac{u^2}{2}\Big\}$$

$\Longrightarrow$ $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ist Martingal bzgl. der kanonischen Filterung mit $EX_t = 1\ \ \forall\, t \geq 0$.

Stoppzeiten

Definition 4.3.

a) $\tau : \ \Omega \to [0,\infty]$ *heißt* <u>*Stoppzeit*</u> *bzgl. einer Filterung* $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$

$:\Longleftrightarrow \quad \{\tau \leq t\} \ \in \ \mathcal{A}_t \quad \forall\ t \geq 0\,;$

b) $\mathcal{A}_\tau \ := \ \{A \in \mathcal{A} : \ A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{A}_t \ \ \forall\ t \geq 0\}$ *heißt die* <u>*σ-Algebra der τ-Vergangenheit*</u>.

Satz 4.3. (<u>*Optional Sampling Theorem*</u>) *Seien* $\{X_t\}_{0\leq t\leq\infty}$ *ein* <u>*rechtsstetiges*</u> *Submartingal bzgl.* $\{\mathcal{A}_t\}_{0\leq t\leq\infty}$ *(mit einer* <u>*letzten*</u> *ZV.* X_∞*) und* $\sigma \leq \tau$ *Stoppzeiten bzgl.* $\{\mathcal{A}_t\}_{0\leq t\leq\infty}$. *Dann gilt:*

$$E(X_\tau \,|\, \mathcal{A}_\sigma) \ \geq \ X_\sigma \quad P\text{-f.s.}$$

Insbesondere $EX_\tau \geq EX_0$, *und jeweils „$=$“, falls* $\{X_t\}_{0\leq t\leq\infty}$ *ein Martingal ist.*

Bemerkung 4.7. Die Messbarkeit von X_τ bzgl. $\mathcal{A}_\tau$ ergibt sich im Beweis von Satz 4.3 (i.w.) aus der Rechtsstetigkeit von $\{X_t\}_{0\leq t\leq\infty}$ und der entsprechenden Adaptiertheit im diskreten Fall.

Etwas allgemeiner ergibt sich diese Messbarkeitseigenschaft aus der (so genannten) „progressiven Messbarkeit“ eines Prozesses:

Definition 4.4. *Sei* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *an die Filterung* $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$ *adaptiert.* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *heißt* <u>*progressiv-messbar*</u>, *falls für alle* $t > 0$ *gilt:*

$$(s,\omega) \ \longmapsto \ X(s,\omega)\Big|_{[0,t]\times\Omega} \quad \textit{ist} \quad (\mathcal{B}_{[0,t]} \otimes \mathcal{A}_t)\textit{-messbar},$$

wobei $\mathcal{B}_{[0,t]} := [0,t] \cap \mathcal{B}^1$ *(die Spur-σ-Algebra).*

Falls $\{X_t\}_{t\geq 0}$ rechts- bzw. linksstetig ist, so ist $\{X_t\}_{t\geq 0}$ progressiv-messbar.

Bemerkung 4.8. Das „Optional Sampling Theorem“ gilt analog für ein rechtsstetiges (Sub-) Martingal $\{X_t\}_{0\leq t<\infty}$ (ohne letzte ZV. X_∞) bzgl. $\{\mathcal{A}_t\}_{0\leq t<\infty}$ unter einer der folgenden Voraussetzungen:

(i) τ ist eine <u>beschränkte</u> Stoppzeit, d.h. $\exists\ a > 0 : \ P(\tau \leq a) \ = \ 1$ <u>oder</u>

(ii) $\{X_t\}_{0\leq t<\infty}$ ist <u>gleichgradig integrierbar</u>.

Korollar 4.3. *Sei* $\{X_t\}_{0\le t<\infty}$ *ein rechtsstetiges Submartingal* (*bzw. Martingal*) *bzgl.* $\{\mathcal{A}_t\}_{0\le t<\infty}$ *und* τ *eine Stoppzeit* $\Longrightarrow$

$\{X_{\tau\wedge t}\}_{0\le t<\infty}$ *ist ein* (*Sub* -) *Martingal bzgl.* $\{\mathcal{A}_t\}_{0\le t<\infty}$.

Beispiel 4.3. Betrachte einen Wiener-Prozess $\{W_t\}_{t\ge 0}$ mit kanonischer Filterung $\{\mathcal{A}_t\}_{t\ge 0}$ (unter den üblichen Bedingungen) und stetigen Pfaden (s.u.). Sei $a \in \mathbb{R}$ und

$$\tau_a \;:=\; \inf\{t \ge 0 : W_t = a\} \quad (\inf \emptyset := +\infty)\,.$$

Dann ist τ_a eine Stoppzeit bzgl. $\{\mathcal{A}_t\}_{t\ge 0}$ mit $P(\tau_a < \infty) = 1$ und Laplace-Transformierter

$$E\, e^{-u\,\tau_a} \;=\; e^{-\sqrt{2u}\,|\,a\,|}\,, \quad u \ge 0\,.$$