II Regularitätseigenschaften stochastischer Prozesse

Bei vorhergehenden Resultaten war es oft wichtig, zusätzlich zu den stochastischen Eigenschaften stochastischer Prozesse noch bestimmte Pfadeigenschaften zu verlangen. In diesem Kapitel sollen Bedingungen dafür hergeleitet werden, dass Prozesse $\{X_t\}_{t\geq 0}$ Modifikationen gestatten, die noch zusätzliche Pfadeigenschaften besitzen.

5 Wesentliche Pfadmengen

Soll z.B. die Brown'sche Bewegung das physikalische Phänomen einer sehr irregulären Bewegung mikroskopisch kleiner Teilchen in einer Flüssigkeit beschreiben, so sollte der Prozess stetige Pfade besitzen. Für den kanonisch konstruierten Wiener-Prozess gilt jedoch, dass die Menge der stetigen Pfade keine messbare Menge ist, da ja (vgl. Üb.) für

$$C[0,\infty) := \{\omega : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^1,\ \omega \text{ ist stetig}\}$$

gilt:

$$C[0,\infty) \notin (\mathcal{B}^1)^{[0,\infty)}.$$

Nach Konstruktion der Produkt-σ-Algebra sind deren Elemente durch die Werte an abzählbar vielen Stellen $\{t_1, t_2, \ldots\} \subset [0,\infty)$ festgelegt, was natürlich für eine beliebige stetige Funktion $t \longmapsto \omega(t)$ nicht der Fall ist.

Wir werden aber sehen, dass durch Übergang zu einer geeigneten Spur-σ-Algebra, hier

$$\widetilde{\mathcal{A}} = C[0,\infty) \cap (\mathcal{B}^1)^{[0,\infty)},$$

und die Fortsetzung

$$\widetilde{P}(\widetilde{A}) := P(A), \quad \text{falls} \quad \widetilde{A} = [0,\infty) \cap A,$$

ein geeigneter Raum konstruiert werden kann, dessen Projektionen einen stochastischen Prozess liefern, der sowohl die gewünschten stochastischen als auch zusätzliche Pfad-Eigenschaften besitzt.

Definition 5.1. *Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ ein polnischer Raum und $(\mu_{t_1,\ldots,t_n})$, $t_j \in T$, $n \in \mathbb{N}$, eine konsistente Familie von W-Maßen. Dann heißt eine Menge $\widetilde{\Omega} \subset \mathcal{X}^T$ wesentlich, wenn es einen stochastischen Prozess $\{X_t\}_{t\in T}$ mit Zustandsraum $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, endlich-dimensionalen Verteilungen $(\mu_{t_1,\ldots,t_n})$ und Pfaden in $\widetilde{\Omega}$ gibt.*

Bemerkung 5.1. Die Konstruktion des kanonischen Prozesses zeigt, dass gilt: $\widetilde{\Omega} = \mathcal{X}^T = \Omega$ ist wesentlich.

> **Satz 5.1.** (*Doob*) *Seien* $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ *ein polnischer Raum,* P_T *das zu* $(\mu_{t_1,\dots,t_n})$ *gehörige* (*kanonische*) *W-Maß auf* $\mathcal{B}^T$ *und* P_T^* *das zu* P_T *gehörige äußere Maß* $\big[$ *d.h. für* $A \subset \Omega = \mathcal{X}^T$: $P_T^*(A) := \inf\{P_T(B) : B \supset A, B \in \mathcal{B}^T\}\big]$.
> *Dann gilt*: $\widetilde{\Omega}$ *ist wesentlich* $\iff$ $P_T^*(\widetilde{\Omega}) = 1$.

Bemerkung 5.2. Der Beweis des Satzes 5.1 zeigt, dass man durch Restriktion auf eine <u>wesentliche</u> Pfadmenge $\widetilde{\Omega}$ zu den endlich-dimensionalen Verteilungen $P_{X_{t_1},\dots,X_{t_n}}$ eines stochastischen Prozesses immer einen stochastischen Prozess $\{\widetilde{X}_t\}_{t\in T}$ auf $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{P})$ finden kann, der dieselben endlich-dimensionalen Verteilungen besitzt. Solche Prozesse heißen „<u>äquivalent</u>“.

Den in Satz 5.1 konstruierten äquivalenten Prozess $\{\widetilde{X}_t\}_{t\in T}$ mit Pfaden in $\widetilde{\Omega}$ nennt man auch den „<u>$\widetilde{\Omega}$ - kanonischen Prozess</u>“ auf $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Omega} \cap \mathcal{B}^T, \widetilde{P})$.

$\widetilde{P}$ ist das einzige W-Maß auf dem eingeschränkten kanonischen Messraum $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Omega} \cap \mathcal{B}^T)$, unter dem die Projektionen einen zu $\{X_t\}_{t\in T}$ äquivalenten Prozess liefern.

Als Nächstes beschäftigen wir uns mit dem speziellen Fall $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ und $\widetilde{\Omega} = C\big([0,\infty), \mathbb{R}^d\big) =: C[0,\infty)$, der Menge der stetigen Abbildungen $\omega : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^d$.