6 Stetige Modifikationen

$\{X_t\}_{t\geq 0}$ sei ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Parametermenge $T = [0, \infty)$ und Zustandsraum $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$.

Als Erstes beweisen wir das folgende

Lemma 6.1. $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *(w.o.) besitze eine stetige Modifikation. Dann ist die Menge* $C[0,\infty)$ *wesentlich bezüglich der endlich-dimensionalen Verteilungen des Prozesses.*

Gesucht sind also z.B. Bedingungen für die Existenz von stetigen Modifikationen stochastischer Prozesse.

Satz 6.1. *(Kolmogorov) Für* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *(w.o.) gelte die folgende Bedingung:* $\exists\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ c > 0 \quad \forall\ s,t \in [0,\infty)$

$$E\,|\,X_t - X_s\,|^{\,\alpha} \;\leq\; c\,|\,t-s\,|^{\,1+\beta}$$

$\Longrightarrow$ *Es existiert eine stetige Modifikation* $\{\widetilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ *von* $\{X_t\}_{t\geq 0}$.

Bemerkung 6.1. Der Beweis von Satz 6.1 liefert sogar eine schärfere Aussage (vgl. Bauer (2002), Satz 39.4 und Korollar 39.5):

Unter den Voraussetzungen von Satz 6.1 besitzt $\{X_t\}_{t\geq 0}$ eine Modifikation $\{\widetilde{X}_t\}_{t\geq 0}$, so dass jeder Pfad $t \longmapsto \widetilde{X}_t(\omega)$ lokal Hölder-stetig ist von jeder Ordnung γ, $0 < \gamma < \beta/\alpha$.

Beispiel 6.1. Sei $\{W_t\}_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Dann gilt: $E\,|\,W_t - W_s\,|^{\,4} \overset{0\leq s\leq t}{=} E\,W_{t-s}^4$

$$= E\left(W_{t-s}^2\right)^2 \quad = \quad Var\left(W_{t-s}^2\right) + \left(E\,W_{t-s}^2\right)^2.$$

Man beachte: $W_{t-s} \overset{\mathcal{D}}{=} \sqrt{|\,t-s\,|}\,W_1,\ EW_1^2 \;=\; 1,\ Var\,(W_1^2) \;=\; 2$.

Damit gilt:
$$Var\left(W_{t-s}^2\right) \;=\; (t-s)^2 Var\,(W_1^2) \;=\; 2\,(t-s)^2$$
$$\left(EW_{t-s}^2\right)^2 \;=\; (t-s)^2$$
$$\Longrightarrow \qquad E\,|\,W_t - W_s\,|^{\,4} \;=\; 3\,|\,t-s\,|^{\,2},$$

d.h., die Bedingung von Satz 6.1 gilt mit $\alpha = 4$, $\beta = 1$, $c = 3$.

Fazit: Es gibt eine Modifikation $\{\widetilde{W}_t\}_{t\geq 0}$, so dass jeder Pfad lokal Hölder-stetig ist von jeder Ordnung $\gamma < \frac{1}{4}$.

Bemerkung 6.2.

a) Mit direkten Methoden lässt sich diese Ordnung noch zu γ mit $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ verschärfen $\big($vgl. Csörgő & Révész (1981)$\big)$.

b) Diese Verschärfung ergibt sich aus Satz 6.1, wenn man beachtet, dass gilt:

$$E\,|\,W_t - W_s\,|^{\,2n} \;=\; c_n\,|\,t-s\,|^{\,n}\,, \qquad c_n = \text{ const.}$$

$\Longrightarrow$ Hölder-Stetigkeit für $\gamma < \frac{n-1}{2n} \to \frac{1}{2} \quad (n \to \infty)$.